数学ライブラリー 20

リーマン幾何学入門

東京工業大学名誉教授　理学博士
矢 野 健 太 郎 著

森北出版株式会社

まえがき

17世紀に，デカルト (René Descartes) とフェルマー (Pierre de Fermat) によって解析幾何学が，ニュートン (Issac Newton) とライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz) によって微分積分学が発見されると同時に，解析幾何学の手法と微分積分学の手法とを，曲線と曲面の性質の研究にあてはめるということがはじめられた．

とくにガウス (Carl Friedrich Gauss) は，これらの手法によって曲面の性質を徹底的に研究して，今日曲面論とよばれているものを作り上げた．

ガウスはとくに，曲面の性質のうちで，曲面に伸縮をともなわない変換，すなわち等長変換を施しても変わらない性質に着目してこれらを研究した．たとえば，曲面上の曲線がその測地線であるという性質は，曲面の等長変換で不変である．またガウスが定義した曲面上の1点におけるその全曲率も曲面の等長変換によって不変である．これら，曲面の等長変換で不変な曲面の性質の研究は，現在曲面上の幾何学とよばれている．

さて，リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann) は，1854年の6月10日に行なわれた，そのゲッチンゲン大学への就職講演「幾何学の基礎をなす仮定について」(Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen) において，上のガウスの曲面上の幾何学を，一般の n 次元多様体における幾何学にまで拡張した．これが今日リーマン幾何学とよばれているものである．

さて，リーマンによって創められたこのリーマン幾何学は，前世紀の後半

を通じて，クリストッフェル (Erwin Bruno Christoffel)，キリング (Wilhelm Killing)，シューア (Issai Schur)，リッチ (Curbustro Gregorio Ricci)，レビ・チビタ (Tullio Levi-Civita)，ビアンキ (Luigi Bianchi)，ベルトラミー (Eugenio Beltrami) などの手によって，主として2次微分形式の理論として発展せしめられていった．世紀の変り目1901年に，これらの研究を集大成してリッチとレビ・チビタが Mathematische Annalen に発表した「絶対微分学の方法とその応用」(Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications) は有名である．リーマン幾何学を研究するのに非常に有力な武器，今日のテンソル解析学は，当時絶対微分学とよばれていたわけである．

さて，1905年にその特殊相対性理論を発表したアインシュタイン (Albert Einstein) は，その拡張としての一般相対性理論を，1916年に，Annalen der Physik に「一般相対性理論の基礎」(Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie) と題して発表した．アインシュタインは，その一般相対性理論を展開するのに，前記の絶対微分学，すなわちテンソル解析学をフルに利用しており，一般相対性理論のこの最初の論文の前半のほとんどは，この絶対微分学の解説にあてられている．

こうして，リーマン幾何学とその研究方法としての絶対微分学とは一躍世人の注目をひくことになったわけである，

このアインシュタインの一般相対性理論の最初の論文よりも1年おくれて，レビ・チビタの，リーマン幾何学における平行性の概念に関する論文 (Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvature Riemanniana, Rend. Palermo) が発表された．このレビ・チビタの論文によって，それまでは主として解析的な理論として研究されてきたリーマン幾何学が，ようやく幾何学的な面をとりもどしたということができよう．

さて，このレビ・チビタの見解は，リーマン幾何学とその拡張とのその後の発展に非常に大きな影響を与えている．

まず，リーマン幾何学というのは，ガウスの曲面上の幾何学の一般次元への拡張であって，そこでは計量の概念が非常に大きな役割を演ずる．もちろんレビ・チビタも，この計量の概念にもとずいて，リーマン空間におけるベクトルの平行性の概念を導入している．

しかし，ふり返って考えてみるのに，平行という概念は，計量幾何学的な概念ではなく，擬似幾何学的な概念である．したがって，リーマン幾何学と，その研究方法としての絶対微分学とから，計量に関する概念を一切とり去ってしまい，そこに擬似幾何学的な概念だけを残して理論を展開する可能性がないかという問題が考えられる．

もし一般の空間に，ベクトルの平行性という概念が存在すれば，接線ベクトルがそれにそってはつねに平行であるような曲線を考えることによって，直線の拡張に相当する曲線を定義することができる．計量の概念が存在するリーマン空間においては，このような曲線は測地線とよばれるが，計量の概念は存在せず，平行性の概念だけが存在する空間においては，このような曲線は道（path）とよばれる．逆に，空間に道の系が与えられていれば，これを用いて空間に平行性の概念を導入することができる．

以上のように，レビ・チビタの平行性の概念にヒントを得て，リーマン空間から計量的な概念を一切とり去り，そこに平行性の概念だけを残した空間を考えてその理論を展開しようとする試みは，はじめてワイル (Claus Hugo Hermann Weyl: Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (1918), 384-411; Raum, Zeit, Materie, Springer, 1921) によって行なわれた．

ワイルは，どちらかと言えば平行性の概念を重視したが，上にのべた道という概念を重視した研究は，主としてプリンストン大学に集まっていた微分幾何者，アイゼンハルト (Luther Pfahler Eisenhart)，ベブレン (Oswald

Veblen), ネーベルマン(M. S. Knebelman), T. Y. トーマス(T. Y. Thomas), J. M. トーマス (J. M. Thomas), ロバートソン (H. P. Robertson) などによって研究された. (たとえば, L. P. Eisenhart and O. Veblen: The Riemannian geometry and its generalization, Proc. Nat. Acad. Sci., 8 (1922), 19-23 参照).

ワイルのように, 空間の性質を平行性の概念を重視して研究する場合, その幾何学は擬似接続幾何学, プリンストン学派の人たちのように, 空間の性質を道の概念を重視して研究する場合, その幾何学は道の幾何学とよばれる.

さてワイルは, 空間に平行性の概念があれば, その接線ベクトルがそれにそって平行であるような曲線として道の概念を導くことができるが, 空間に道の系が与えられた場合, それが, 接線がそれにそって平行な曲線になるような平行性はただ一通りには定まらないことを注目した. 上に述べたように, 平行性のことを擬似接続とよぶことがあるが, ワイルは, 道の系を不変にたもつような擬似接続の変換の存在することを発見した. (H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Göttinger Nachrichten, 1921, 99-112). これは擬似接続の射影変換とよばれているが, この射影変換で不変な性質の研究は, ワイルおよび上のプリンストン学派の人たちによって行なわれ, 現在道の射影幾何学とよばれている.

この一般の n 次元空間における射影幾何学は, オランダ学派の人たち, スカウテン (J. A. Schouten), ファン・ダンチッヒ (D. van Dantzig), ハーンチェス (J. Haantjes) などによって, 上と全く異なる方法を用いて研究された. (たとえば, J. A. Schouten und J. Haantjes, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, Compositio Math., 3 (1936), 1-51 参照).

ワイルはさらに, リーマン空間の計量に対して, 長さの概念はかえるが, 角の概念はかえない変換を考えることができ, リーマン空間の性質のなかで,

この角の概念をかえない変換によって不変な性質にのみ着目する幾何学を上記の論文で創始し，これをリーマン空間の共形幾何学とよんだ．この見地は，前記プリンストン学派の人たちによって採用された．(たとえば，O. Veblen, conformal tensors ond connexions, Proc. Nat. Acad. Sci. 14(1928), 735-745 参照)．また前記オランダ学派の人たちは，この共形幾何学を，彼ら独特の方法で展開した，(たとえば，J. A. Schouten und J. Haantjes, Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie I, II, Math. Ann. 112 (1936), 595-629; 113 (1938), 568-583 参照)．

さて，レビ・チビタの平行性は，空間の1点におけるベクトルと，その点に非常に近い点におけるベクトルとが，どのような場合に平行であるかを規定するものである．これを曲面の例で言い直せばつぎのようになる．曲面上の1点においてこの曲面に接するベクトルと，それに非常に近い点において同じくこの曲面に接するベクトルとは，この第2のベクトルを，第1の点における接平面上へ正射影したときに，それが第1のベクトルとふつうの意味で平行になるとき，平行であると言われる．

カルタン (Elie Cartan) は上のレビ・チビタの考えをつぎのように考え直した．同じく曲面の例を用いて説明を続ければ，曲面上の各点では，その点における曲面への接平面が考えられるが，曲面上の非常に近い2点における接平面同士は，その一方を他方の上へ正射影することによって，ユークリッド的対応におくことができる．カルタンはこの対応を接続とよんだが，この見地から見れば，曲面，さらにはその拡張であるところのリーマン空間は，非常に近い2点における接平面，さらに一般には接空間同士の間に1つのユークリッド的対応の与えられた空間であると見なすことができる．この立場からカルタンは，リーマンの計量と，そのなかにレビ・チビタの平行性の概念の与えられている空間を，ユークリッド接続空間とよんだ．

このカルタンの見解によれば，リーマン空間は，各点における接空間はユ

ークリッド空間であり，非常に近い2点における接ユークリッド空間の間には，それらを重ね合わす規則としての接続が与えられている空間である．この見地によれば，各点における接空間は擬似空間，射影空間，または共形空間であり，非常に近い2点における接空間同士の間には，それらを重ね合わすそれぞれ擬似的，射影的，または共形的な対応が与えられているような空間を想像することもできる．カルタンはこれらの空間をそれぞれ擬似接続空間，射影接続空間，共形接続空間とよんだ（たとえば，E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. Ec. Norm. Sup. 40 (1923), 325-412; Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Pol. Math. 2 (1923), 171-221; Sur les variétés à connexion projective. Bull. Soc. Math. France, 52 (1924), 205-241 参照）．

このカルタンの見解は，古典的な幾何学を変換群論の立場から分類したクライン (Felix Klein) のそれに匹敵するものであって，それ以後の微分幾何学の研究に非常に大きな影響を与えている．

さてここで，以上の歴史が進行中であった 1920 年代におけるわが国の幾何学研究の状態はどうであったかをふり返ってみよう．

上にも述べたように，クラインは，図形の，運動群によって不変な性質を研究するのがユークッド幾何学，擬似変換群によって不変な性質を研究するのが擬似幾何学，射影変換群によって不変な性質を研究するのが射影幾何学，共形変換群によって不変な性質を研究するのが共形幾何学であるという見解を，有名なエルランゲンの目録 (F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Math. Ann. 43 (1893)) で発表した，この見解にしたがって，種々の幾何学を，微分積分学の手法を採用して研究していくことが，上に述べた歴史と平行して，1920 年代には行なわれていた．（たとえば，ユークリッド微分幾何学については，W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Springer, 1921; 擬似微分幾何

学については，W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, II. Affine Differentialgeometrie, Springer, 1923; 射影微分幾何学については，E. Cech et G. Fubini, Introduction à la géométrie différentielle projective des surfaces, Paris, 1931; W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, Springer, 1929 参照).

さて，1910 年代から 20 年代にかけては，わが国では以上に述べた線にそって研究が行なわれていたが，とくに，東北大学に集まる日本の数学者，藤原松三郎，掛谷宗一，窪田忠彦，高須鶴三郎などの卵形線の微分幾何学的研究は有名である.（たとえば，T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Erg. der Math., Springer, 1934 参照).

しかし，高須鶴三郎，河口商次などは，すでに述べたリーマン幾何学とその研究方法としてのテンソル解析，そしてその拡張が研究されつつあった世界の大勢に注目して，古典微分何学の研究から，このリーマン幾何学とその拡張へ向かっていった.（たとえば，高須鶴三郎，わが空間の真相，共立社，1933 参照).

河口商次は，リーマン空間の拡張であるフィンスラー空間と，さらにその拡張になっているいわゆる高次空間の研究に向かったが，細川藤右衛門，本部均，穂刈四三二などがこれに協力した．また蟹谷乗養は，カルタンの方法によって射影微分幾何学を研究した.

また，佐々木重夫と著者は，上に述べたプリンストン学派の方法，またはカルタンの方法を用いて，射影接続幾何学と共形接続幾何学とを主として研究した.（たとえば，佐々木重夫，共形接続幾何学，河出書房，1948; K. Yano, Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths, Thèse, 1938 参照).

さて，この書物は，以上のような情勢のもとに，著者が 1941 年の夏に日

土大学で行なった講義をもとにしてまとめ，1942年に考え方研究社から発行された書物である．これは，わが国の幾何学界がようやく古典微分幾何学の域を脱してリーマン幾何学とその拡張の研究へ向かう気運を獲得し得たにもかかわらず，まだリーマン幾何学の適当な参考書がなかったので，著者があえてテンソル解析学の初歩とリーマン幾何学の概要を説明するために書いたものである．

しかし，この書物がはじめて書かれたときから，もう30年近い時間がたっている．もちろんその間にリーマン幾何学は素晴らしい発展を示し，わが国の微分幾何学界も大きな成長を示し，研究者の数も非常に多くなっている．したがって，いまこの書物を見直してみれば，著者自身まことにはがゆい思いがする．

しかし，著者のまわりの人たちのなかには，この書物はいまでもリーマン幾何学の入門書としては適当であると言ってくれる人があるし，森北出版株式会社がこの書物をもう一度発行してくれるというので，記号をいささか現代式のものに書き改めたという以外は，もとのままの形でこの書物をもう一度出版してもらうことにした．

しかし，リーマン幾何学の現在の状態から考えて，たとえ入門の入門だけとしても本書の内容だけでは不十分であると思われるので，ここにさらに新しい参考書のいくつかをあげておこう．

まず外国語のものからあげよう．

L. Auslander, Differential geometry, A. Harper International Edition (1967).

L. Auslander and R. J. Mackenzie, Introduction to differentiable manifolds, McGraw-Hill, New York (1963).

R. Bishop and R. J. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic Press (1964).

R. Bishop and S. I. Goldberg, Tensor analysis on manifolds, The MacMillan Company, New York (1968).

E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris (1928), 第2版, (1946).

A. J. McConnell, Applications of the absolute differential calculus, Blackie and Son, London and Grasgow (1931).

L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton Univ. Press (1926), 第 2 版, (1949).

J. C. H. Gerretsen, Lectures on tensor calculus and differential geometry, P. Noordhoff, Groningen (1962).

S. I. Goldberg, Curvature and homology, Academic Press, New York, (1962).

H. W. Guggenheimer, Differential geometry, McGraw-Hill Book Co., New York, (1963).

S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New York, (1962).

N. Hicks, Notes on differential geometry, Van Nostrand, (1964).

W. V. D. Hodge, Theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, (1949).

S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, I, II, Interscience Publishers, (1963), (1968).

S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience Publishers, New York, (1961).

F. J. Lelong, Géométrie différentielle, Masson et Cie Editeurs, Paris, (1963).

D. Laugwitz, Differential and Riemannian geometry, Academic Press,

New York, (1965).

T. Levi-Civita, The absolute differential calculus, Blackie and Son, London and Grasgow, (1927).

A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, (1958).

K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan, No. 2 (1956).

B. O'Neill, Elementary differential geometry, Academic Press, New York and London, (1966).

G. de Rham, Variétés différentiables, Act. Sci. Hermann, Paris, (1955).

J. A. Schouten, Ricci-Calculus, Springer, Berlin, (1954).

S. Sternberg. Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, (1964).

C. E. Weatherburn, An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge University Press, (1938).

T. J. Willmore, An introduction to differential geometry, Clarendon Press, Oxford, (1959).

K. Yano, Integral formulas in Riemannian geometry, Marcel Dekker Inc., New York, (1970).

K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1953).

これらのうち，本書につづいて読むのに適当であると思われるのは，R. Bishop and S. I. Goldberg, E. Cartan, A. J. McConnell, L. P. Eisenhart, J. C. H. Gerretsen, H. W. Guggenheimer, N. Hicks, S. Kobayashi and K. Nomizu, D. Laugwitz, T. Levi-Civita, K. Nomizu, B. O'Neill,

C. E. Weatherburn, T. J. Willmore の書物であろう.

つぎに日本の書物をあげておこう.

栗田　稔, リーマン幾何, 至文堂 (1965)

松島　与三, 多様体入門, 掌華房 (1965)

大槻富之助, 接続の幾何学, 現代数学講座, 共立出版 (1957)

佐々木重夫, リーマン幾何学, I, II. 現代数学講座, 共立出版 (1957)

立花　俊一, リーマン幾何学, 近代数学講座 15, 朝倉書店 (1967)

矢野健太郎, リーマン幾何学の概要と最近の微分幾何学, 岩波書店(1942)

————, 接続の幾何学 (数学ライブラリ), 森北出版 (1968)

著者は, この小著がなおお役に立つことを心から祈るものである.

なお, 本書の校正については, 埼玉大学の奥村正文博士の献身的な協力を得ることができた. ここに記して厚く感謝の意を表したい.

昭和 46 年 3 月

矢野健太郎

目　　次

1 章

テンソル代数学

1.1 指 標 記 号

解析幾何学や微積分学において，3つの互いに独立な変数の現われた場合には，我々はこれらを x, y, z のような3つの相異なる文字を用いて表わすのが普通である．しかしながら我々が今後リーマン幾何学または更にこれより一般な最近の微分幾何学の研究を進めて行くに当たっては，このような相異なる文字を用いる代わりに，同一の文字を用い，これらを区別するには指標を用いる方が遙かに便利である．すなわち x, y, z と書く代わりに x_1, x_2, x_3 と書こうというのである．このような記法を採用することにすれば，これをまとめて

$$x_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, 3)$$

と書くこともできる．なお，この記法のさらに便利な点は，変数の数が4個，5個，……，一般に n 個になったとしても，指標の番号を増すだけで前と全く同様に，これを

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$$

と書き表わすことのできる点である．

さて，上の記法においては，変数を区別するための指標を，中心になる文字の右下につけた．しかしこれはまた右上につけて

$$x^1, x^2, \cdots\cdots, x^{n-1}, x^n$$

または

$$x^\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, 3, \cdots, n-1, n)$$

とすることもできる．実際，本章で説明しようとするテンソル代数学においては，右上につけた指標と右下につけた指標とを巧に使い分けて議論を進めて行くのである．しかしながら独立変数や座標を表わす場合には

$$x^1, x^2, x^3, \cdots\cdots, x^n$$

のように，指標を右上につけるのが便利であることが後になって自然に了解されることと思う．

ただ，ここで注意しなければならないのは，$x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n$ と書いたからといって，これらは決して x の 1 乗, 2 乗, 3 乗, $\cdots$ n 乗を表わすものではない，ということである．中心になる文字 x の右上の肩につけた数字は，ただ単に変数を区別するためにつけた番号にすぎないのである．

代数学や解析幾何学においては，変数 x, y, z の 1 次形式を表わすのに，普通

$$ax + by + cz$$

のような記号を用いる．我々はここに現われる x, y, z のような変数を x^1, x^2, x^3 という記号で表わすと約束をしたのであるが，更に a, b, c を

$$a = a_1, \qquad b = a_2, \qquad c = a_3$$

という記号で表わすことにすれば，上の 1 次形式は，これを

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_\lambda x^\lambda = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

という具合に非常にきれいな形に書くことができる．なお，この記法のさらに便利な点は，変数の数が n 個になった場合にも，上と全く同様に

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda x^\lambda = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n$$

とこれを書き表わし得る点である．

変数を表わす文字 x に対しては，我々は指標を右上につけたが，ここに現われた定数係数 a に対しては指標を右下につけた．このような指標の使い分けがなぜ必要であり，またなぜ便利であるかは，次の総和に関する規約を読

まれれば直ちに了解されることと思う．

指標記法活用のもう1つの例として，代数学における斉次2次形式を我々の指標記法で書き改めてみよう．これは普通

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

と書かれる．いま前と同様に

$$x = x^1, \qquad y = x^2, \qquad z = x^3$$

と置き，更に

$$a = a_{11}, \qquad b = a_{22}, \qquad c = a_{33},$$

$$f = a_{23} = a_{32}, \qquad g = a_{31} = a_{13}, \qquad h = a_{12} = a_{21}$$

と置けば，上の2次形式は

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\lambda=1}^{3} a_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda &= a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 \\ &+ a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 + a_{23} x^2 x^3 \\ &+ a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33} x^3 x^3\end{aligned}$$

となる．こうすれば変数がn個の場合の2次形式も簡単に

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda &= a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + \cdots\cdots + a_{1n} x^1 x^n \\ &+ a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 + \cdots\cdots + a_{2n} x^2 x^n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n1} x^n x^1 + a_{n2} x^n x^2 + \cdots\cdots + a_{nn} x^n x^n\end{aligned}$$

とこれを書き表わすことができる．

1.2 総和に関する規約

我々が今後リーマン幾何学を学ぶに当たっては，一般にn次元の空間を研究の対象とするのであるから，今後変数 $x^1, x^2, \cdots\cdots$, 等の数はn個，したがって指標の走り得る範囲は1からnまでと限って話を進めよう．さて前節で

述べた1次形式

$$\sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda x^\lambda$$

にせよ，2次形式

$$\sum_{\mu,\lambda=1}^{n} a_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda$$

にせよ，いずれも1からnまでの総和を求めるような指標は，各項のなかに二度ずつ現われている．したがって

各項のなかに同じ指標が二度繰り返されているならば，これはその指標に関する1からnまでの総和を意味する

と約束さえしておけば，この $\sum_{\lambda=1}^{n}$ または $\sum_{\mu,\lambda=1}^{n}$ という記号を取り去ってしまって簡単に

$$a_\lambda x^\lambda = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n,$$

$$\begin{aligned} a_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda = &\ a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + \cdots\cdots + a_{1n} x^1 x^n \\ &+ a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 + \cdots\cdots + a_{2n} x^2 x^n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n1} x^n x^1 + a_{n2} x^n x^2 + \cdots\cdots + a_{nn} x^n x^n \end{aligned}$$

と書くことができて非常に便利である．

そこで我々は今後は上の規約を採用することとするが，ここに注意すべきは2回繰り返された指標は単に1からnまでの総和を意味するだけなのであるから，これを他の任意の指標で置き換えてもよいということである．たとえば

$$a_\lambda x^\lambda = a_\mu x^\mu = a_\nu x^\nu = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n,$$

$$\begin{aligned} a_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda = a_{\beta\alpha} x^\beta x^\alpha = &\ a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + \cdots\cdots + a_{1n} x^1 x^n \\ &+ a_{21} x^2 x^1 + a_{22} x^2 x^2 + \cdots\cdots + a_{2n} x^2 x^n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{n1} x^n x^1 + a_{n2} x^n x^2 + \cdots\cdots + a_{nn} x^n x^n \end{aligned}$$

である．このように総和を表わす指標は，上下に現われるように工夫しておくのが便利である．

これに反して我々は総和を表わさない指標を用いることもある．たとえば

n 個の変数	x^κ	$(\kappa=1,2,3,\cdots,n)$
n 個の定数係数	α_λ	$(\lambda=1,2,3,\cdots,n)$
n^2 個の定数係数	$\alpha_{\mu\lambda}$	$(\mu,\lambda=1,2,3,\cdots,n)$

などのようなものである．このような場合に，指標はたいてい1からnまで変わるものなのであるから，いちいち但し書きをつけないで

今後は $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\kappa,\lambda,\mu,\nu,\cdots$ などのギリシャ文字で表わされた指標は，特別な但し書きのない限り何時でも1からnまで変わるもの

と約束しておくことにする．

したがって x^κ と書けば

$$x^1, x^2, x^3\cdots\cdots, x^n$$

を，a_λ と書けば

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$$

を，$\alpha_{\mu\lambda}$ と書けば

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\cdots, a_{1n}, \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\cdots, a_{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots\cdots, a_{nn} \end{array}$$

を表わしているものと約束する．

1.3 行　列　式

この節では，読者諸君がすでによく知っている行列式の2,3の性質を，我々の指標記法を用いて書き表わしてみよう．まずn次の行列式

$$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

を考えよう．ここに我々は行列式の要素を a_μ^λ で表わしたが，右上につけた指標 λ は，行列式 a におけるこの要素の存在する行を，右下につけた指標 μ は，この要素の存在する列を表わしているのである．

これらの要素が

$$a_\mu^\lambda = a_\lambda^\mu$$

という条件を満足していれば，この行列式は対称，

$$a_\mu^\lambda = -a_\lambda^\mu$$

という条件を満足していれば，この行列式は交代であるといわれる．

さて行列式 a を第1行に沿って展開すれば

$$a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ a_1^3 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

となるが，ここで $a_1^1, a_2^1, \cdots, a_n^1$ の係数，すなわち行列式 a における $a_1^1, a_2^1, \cdots, a_n^1$ の余因数をそれぞれ $A_1^1, A_1^2, \cdots, A_1^n$ とおけば，上式は

$$a = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_1^2 + \cdots\cdots + a_n^1 A_1^n$$

となる．これと全く同様に第2行，第3行，……等に沿っての展開を求めるために，行列式 a における元素 a_μ^λ の余因数を A_λ^μ とおけば

$$a = a_1^2 A_2^1 + a_2^2 A_2^2 + a_3^2 A_2^3 + \cdots\cdots + a_n^2 A_2^n,$$

$$a = a_1^3 A_3^1 + a_2^3 A_3^2 + a_3^3 A_3^3 + \cdots\cdots + a_n^3 A_3^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a = a_1^n A_n^1 + a_2^n A_n^2 + a_3^n A_n^3 + \cdots\cdots + a_n^n A_n^n$$

を得る．いまこれ等を前に説明した指標記法を用いて書き改めてみれば

$$a = a^1_\nu A^\nu_1,\ a = a^2_\nu A^\nu_2,\ a = a^3_\nu A^\nu_3,\ \cdots\cdots,\ a = a^n_\nu A^\nu_n$$

となって非常に簡単になる．しかしよく注意してみると，これらの公式においては，a の右上の指標と A の右下の指標は常に同一である．それならばこれが異なっている場合には，これらは果たして何を表わすであろうか．たとえば $a^1_\nu A^\nu_2$ をとって考えてみよう．

$$a^1_\nu A^\nu_2 = a^1_1 A^1_2 + a^1_2 A^2_2 + a^1_3 A^3_2 + \cdots\cdots + a^1_n A^n_2.$$

ここに $a^1_1, a^1_2, a^1_3, \cdots\cdots, a^1_n$ は行列式 a における第1行の要素であるが，A^1_2, $A^2_2, \cdots\cdots, A^n_2$ は行列式 a における第2行の要素 $a^2_1, a^2_2, \cdots, a^2_n$ の余因数である．したがって上式は行列式 a の第1行の各要素に，それぞれ第2行の各要素の余因数を掛けて加えたものであるから，行列式のよく知られた性質によって，この値は恒等的に0となる．これと全く同様に考えれば，$a^\kappa_\nu A^\nu_\mu$ という式は行列式 a における第 κ 行の要素に，それぞれ第 μ 行の各要素の余因数を掛けて加えたものであることがわかる．したがって $a^\kappa_\nu A^\nu_\mu$ という式は κ と μ が等しければ行列式の値を表わし，κ と μ が相異なれば恒等的に0となることがわかれる．この事実を我々は次のように書き表わす．

$$a^\kappa_\nu A^\nu_\mu = a\delta^\kappa_\mu$$

ここに δ^κ_μ は $\kappa = \mu$ ならば1を，$\kappa \neq \mu$ ならば0を表わす記号であって，**クロネッカー** (L. Kronecker) **のデルター**と呼ばれている．すなわち

$$\delta^\kappa_\mu = \begin{cases} 1 & \kappa = \mu, \\ 0 & \kappa \neq \mu \end{cases}$$

いままでの議論は行列式の行に沿っての展開をもとにしたものであるが，列に沿っての展開を考えるならば前と全く同様に

$$a^\nu_\mu A^\kappa_\nu = a\delta^\kappa_\mu$$

が得られる．

いま $a \neq 0$ として

$$\frac{A^\nu_\mu}{a} = \alpha^\nu_\mu$$

と書くことにすれば，上の2つの公式はこれを

$$a^\kappa_\nu \alpha^\nu_\mu = \delta^\kappa_\mu, \quad a^\nu_\mu \alpha^\kappa_\nu = \delta^\kappa_\mu$$

とも書くことができる．

なお2つの行列式

$$a = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} \quad \text{および} \quad b = \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & \cdots & b^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n_1 & b^n_2 & \cdots & b^n_n \end{vmatrix}$$

の積は

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_n \\ b^2_2 & b^2_2 & \cdots & b^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n_1 & b^n_2 & \cdots & b^n_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^1_1 b^1_1 + \cdots + a^1_n b^n_1, & a^1_1 b^1_2 + \cdots + a^1_n b^n_2, & \cdots\cdots, & a^1_1 b^1_n + \cdots + a^1_n b^n_n \\ a^2_1 b^1_1 + \cdots + a^2_n b^n_1, & a^2_n b^1_2 + \cdots + a^2_n b^n_2, & \cdots\cdots, & a^2_1 b^1_n + \cdots + a^2_n b^n_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 b^1_1 + \cdots + a^n_n b^n_1, & a^n_1 b^1_2 + \cdots + a^n_n b^n_2, & \cdots\cdots, & a^n_1 b^1_n + \cdots + a^n_n b^n_n \end{vmatrix}$$

で与えられることもよく知られているが，我々の指標記法を活用すれば，これも

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & \cdots & b^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^n_1 & b^n_2 & \cdots & b^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1_\nu b^\nu_1, & a^1_\nu b^\nu_2, & \cdots\cdots, & a^1_\nu b^\nu_n \\ a^2_\nu b^\nu_1, & a^2_\nu b^\nu_2, & \cdots\cdots, & a^2_\nu b^\nu_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_\nu b^\nu_1, & a^n_\nu b^\nu_2, & \cdots\cdots, & a^n_\nu b^\nu_n \end{vmatrix}$$

と非常に簡単に書くことができる．

1.4 連立1次方程式

n 個の未知数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ を含んだ n 個の連立1次方程式

$$a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots\cdots + a^1_nx^n = b^1,$$
$$a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots\cdots + a^2_nx^n = b^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^n_1x^1 + a^n_2x^2 + \cdots\cdots + a^n_nx^n = b^n$$

を考えよう．これらの方程式の左辺に現われる係数で作った行列式は前節で説明した行列式である．さて，上の連立1次方程式を我々の指標記法で書けば

$$a^\lambda_\mu x^\mu = b^\lambda$$

となる．この場合，係数 a^λ_μ で作った行列式 a が 0 でなければ，上の連立1次方程式を未知数 x^μ について解くことのできるということはよく知られた事実であるが，指標記法を用いれば，この事実は次のように簡単に説明することができる．行列式 a の値は 0 でないと仮定したのであるから，行列式 a における要素 a^λ_μ の余因数を A^μ_λ と置き，更に

$$\alpha^\mu_\lambda = \frac{A^\mu_\lambda}{a}$$

と置けば前節の結果から

$$\alpha^\nu_\lambda a^\lambda_\mu = \delta^\nu_\mu \quad \text{および} \quad \alpha^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu$$

である．したがって

$$a^\lambda_\mu x^\mu = b^\lambda$$

の両辺に α^ν_λ を掛けて λ に関して1から n までの総和を求めれば

$$\alpha^\nu_\lambda a^\lambda_\mu x^\mu = \alpha^\nu_\lambda b^\lambda,$$

すなわち

$$\delta^\nu_\mu x^\mu = \alpha^\nu_\lambda b^\lambda.$$

しかるに $\delta^\nu_\mu x^\mu$ は

$$\nu = 1 \text{ のとき} \qquad \delta^1_1 x^1 + \delta^1_2 x^2 + \delta^1_3 x^3 + \cdots\cdots + \delta^1_n x^n,$$
$$\nu = 2 \text{ のとき} \qquad \delta^2_1 x^1 + \delta^2_2 x^2 + \delta^2_3 x^3 + \cdots\cdots + \delta^2_n x^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu = n \text{ のとき} \qquad \delta^n_1 x^1 + \delta^n_2 x^2 + \delta^n_3 x^3 + \cdots\cdots + \delta^n_n x^n$$

という n 個の量を表わしているのであるが，δ^ν_μ に関する約束を思い出せば，第1の式は x^1, 第2の式は x^2, …, 第 n の式は x^n を表わしていることは明らかであろう．ゆえに

$$\delta^\nu_\mu x^\mu = x^\nu,$$

したがって

$$x^\nu = \alpha^\nu_\lambda b^\lambda$$

を得る．これは**クラマーの法則**として知られている解法の指標記法的な表現である．

1.5　斉 1 次 変 換

n 個の互いに独立な変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ を，新しい n 個の互いに独立な変数 $x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}$ に変換する斉1次変換

$$x^{1'} = A^{1'}_1 x^1 + A^{1'}_2 x^2 + \cdots\cdots + A^{1'}_n x^n,$$
$$x^{2'} = A^{2'}_1 x^1 + A^{2'}_2 x^2 + \cdots\cdots + A^{2'}_n x^n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n'} = A^{n'}_1 x^1 + A^{n'}_2 x^2 + \cdots\cdots + A^{n'}_n x^n$$

を考えよう．ただし変換の行列式 $A = |A^{\kappa'}_\lambda|$ の値は0でないものと仮定する．これらの変換式を我々の指標記法を用いて書けば

$$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa}$$

となる．しかるに $A = |A^{\kappa'}_\kappa| \neq 0$ なのであるから

$$A^\lambda_{\kappa'} A^{\kappa'}_\mu = \delta^\lambda_\mu$$

となるような $A^\lambda_{\kappa'}$ を求めることができる．したがってこれを用いれば上式を

x^{κ} について解くことができて

$$x^{\kappa} = A^{\kappa}_{\kappa'} x^{\kappa'}$$

を得る．すなわち我々が最初に考えた斉1次変換に対しては，やはり斉1次である逆変換が対応することがわかった．

いま特に $A^{\kappa'}_{\lambda}$ として $\delta^{\kappa}_{\lambda}$ をとれば

$$x^{\kappa'} = \delta^{\kappa}_{\lambda} x^{\lambda} = x^{\kappa}, \qquad |A^{\kappa'}_{\lambda}| = 1 \neq 0$$

となるが，このような斉1次変換は**恒等変換**と呼ばれる．

さらにまた斉1次変換

$$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa} \qquad (|A^{\kappa'}_{\kappa}| \neq 0)$$

によって変数 x^{κ} を変数 $x^{\kappa'}$ に変換し，次に斉1次変換

$$x^{\kappa''} = A^{\kappa''}_{\kappa'} x^{\kappa'} \qquad (|A^{\kappa''}_{\kappa'}| \neq 0)$$

によって変数 $x^{\kappa'}$ を変数 $x^{\kappa''}$ に変換したとすれば，変数 x^{κ} を直接 $x^{\kappa''}$ に変換する変換式は

$$x^{\kappa''} = A^{\kappa''}_{\kappa'} A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa}$$

である．したがって

$$A^{\kappa''}_{\kappa'} A^{\kappa'}_{\kappa} = A^{\kappa''}_{\kappa}$$

とおけば

$$x^{\kappa''} = A^{\kappa''}_{\kappa} x^{\kappa}$$

であって，しかも

$$|A^{\kappa''}_{\kappa}| = |A^{\kappa''}_{\kappa'} A^{\kappa'}_{\kappa}| = |A^{\kappa''}_{\kappa'}| \cdot |A^{\kappa'}_{\kappa}| \neq 0$$

となるから，2つの斉1次変換を組み合わせて得られる，x^{κ} を直接 $x^{\kappa''}$ に変換する変換もやはり1つの斉1次変換である．

さて，ある一群の変換の集合は，次の3つの条件を満足する場合に**群**をなすといわれる．

（i） x^{κ} を $x^{\kappa'}$ に変換する変換と，$x^{\kappa'}$ を x'' に変換する変換とがこの変換

の集合に属すれば，x^{κ}を直接$x^{\kappa''}$に変換する変換もこの集合に属する．

（ii）　この変換の集合は恒等変換を含む．

（iii）　ある変換がこの集合に属すれば，その逆変換も存在して，やはりこの集合に属する．

したがって我々の斉1次変換全体の集合は，1つの群を作っているということができるわけである．

1.6　斉1次変換に対する不変量，反変ベクトル，および共変ベクトル

いま変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ の関数 $f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ があって，この関数は変数の斉1次変換

$$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa} \qquad (A^{\kappa'}_{\kappa}\text{ は定数})$$

を行なってもその値を変えない，すなわち不変であるというなら，我々はこの量を斉1次変換に対する**不変量**または**スカラー**と呼ぶ．

次に変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ の n 個の関数 $v^1, v^2, \cdots, v^n$ があって，これらの関数が $x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^{\kappa}$ なる変数の斉1次変換に対して

$$v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} v^{\kappa}$$

という変換を受ける場合に，これらの関数 $v^1, v^2, \cdots, v^n$ は1つの**反変ベクトルの成分**であるといわれる．したがって変数自身 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ も1つの反変ベクトルの成分になっているわけである．

次に変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ の n 個の関数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ があって，これらの関数が変数の斉1次変換に対して

$$v_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'} v_{\lambda}$$

という変換を受ける場合に，これらの関数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ は1つの**共変ベクトルの成分**であるといわれる．

いま $v_1, v_2, \cdots, v_n$ を1つの共変ベクトルの成分として，これらを係数とする1次形式

$$v_{\lambda} x^{\lambda} = v_1 x^1 + v_2 x^2 + \cdots\cdots + v_n x^n$$

を作れば，これは1つの不変量である．なぜなら，変数の変換を行なった場合，v_λ は $v_{\lambda'}$ に，x^λ は $x^{\lambda'}$ にそれぞれ前述のような法則に従って変換されたものとすれば

$$v_{\lambda'}x^{\lambda'} = (A^{\lambda}_{\lambda'}v_\lambda)(A^{\lambda'}_{\mu}x^\mu) = (A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\lambda'}_{\mu})v_\lambda x^\mu = \delta^{\lambda}_{\mu}v_\lambda x^\mu = v_\lambda x^\lambda$$

となるからである．上述のように，今後我々は反変ベクトルの成分と共変ベクトルの成分は，それぞれ指標を右上および右下につけてこれらを区別することとする．

1.7 斉1次変換に対するテンソル

u^λ と v^κ をそれぞれ，反変ベクトルの成分とすれば，これらの関数は変数の斉1次変換 $x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}x^\kappa$ に対してはそれぞれ

$$u^{\lambda'} = A^{\lambda'}_{\lambda}u^\lambda, \qquad v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa}v^\kappa$$

という変換を受ける．したがって u^λ と v^κ を掛け合わせて $u^\lambda v^\kappa$ という n^2 個の関数を作れば，これらは変数の斉1次変換に対して

$$u^{\lambda'}v^{\kappa'} = A^{\lambda'}_{\lambda}A^{\kappa'}_{\kappa}u^\lambda v^\kappa$$

という変換を受ける．これを拡張して $T^{\lambda\kappa}$ のように，2つの指標をもった n^2 個の関数であって，変数の斉1次変換に対しては

$$T^{\lambda'\kappa'} = A^{\lambda'}_{\lambda}A^{\kappa'}_{\kappa}T^{\lambda\kappa}$$

という変換を受ける量を**2次の反変テンソルの成分**と呼ぶ．

今度は u_μ, v_λ をそれぞれ共変ベクトルの成分としよう．これらの関数の変数の斉1次変換に対する変換法則はそれぞれ

$$u_{\mu'} = A^{\mu}_{\mu'}u_\mu \quad \text{および} \quad v_{\lambda'} = A^{\lambda}_{\lambda'}v_\lambda$$

であるから，u_μ と v_λ を掛け合わせて作った n^2 個の関数 $u_\mu v_\lambda$ の変換法則は

$$u_{\mu'}v_{\lambda'} = A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}u_\mu v_\lambda$$

である．このように指標を2つもった n^2 個の関数 $T_{\mu\lambda}$ であって，変数の斉1

次変換に対しては

$$T_{\mu'\lambda'} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} T_{\mu\lambda}$$

という変換を受ける量を**2次の共変テンソルの成分**と呼ぶ．

ここに定義した共変テンソルの成分 $T_{\mu\lambda}$ を係数とする，変数 x^{λ} の2次形式 $T_{\mu\lambda}x^{\mu}x^{\lambda}$ は1つの不変量である．なぜなら

$$\begin{aligned} T_{\mu'\lambda'}x^{\mu'}x^{\lambda'} &= A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} T_{\mu\lambda} A_{\omega}^{\mu'} x^{\omega} A_{\nu}^{\lambda'} x^{\nu} \\ &= (A_{\mu'}^{\mu} A_{\omega}^{\mu'})(A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\nu}^{\lambda'}) T_{\mu\lambda} x^{\omega} x^{\nu} \\ &= \delta_{\omega}^{\mu} \delta_{\nu}^{\lambda} T_{\mu\lambda} x^{\omega} x^{\nu} \\ &= T_{\mu\lambda} x^{\mu} x^{\lambda} \end{aligned}$$

であるからである．

最後に u^{κ} を1つの反変ベクトルの成分，v_{λ} を1つの共変ベクトルの成分としよう．これらの関数の，変数の斉1次変換に対する変換法則はそれぞれ

$$u^{\kappa'} = A_{\kappa}^{\kappa'} u^{\kappa}, \qquad v_{\lambda'} = A_{\lambda'}^{\lambda} v_{\lambda}$$

であるから，これらを掛け合わせて $u^{\kappa}v_{\lambda}$ という n^2 個の関数を作れば，これらの関数の，変数の斉1次変換に対する変換法則は

$$u^{\kappa'}v_{\lambda'} = A_{\kappa}^{\kappa'} A_{\lambda'}^{\lambda} u^{\kappa} v_{\lambda}$$

である．このように指標を2つもった n^2 個の関数 $T^{\kappa}{}_{\lambda}$ であって，変数の斉1次変換に対して

$$T^{\kappa'}{}_{\lambda'} = A_{\kappa}^{\kappa'} A_{\lambda'}^{\lambda} T^{\kappa}{}_{\lambda}$$

という変換を受ける量を**2次の混合テンソルの成分**と呼ぶ．

我々は上の定義を更に拡張して**任意の次数のテンソル**を定義することができる．たとえば

$$T^{\mu'\lambda'\kappa'} = A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\kappa}^{\kappa'} T^{\mu\lambda\kappa}$$

という変換を受ける n^3 個の関数 $T^{\mu\lambda\kappa}$ を，**3次の反変テンソルの成分**と呼ぶ．また

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

なる変換を受ける n^3 個の関数 $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ を，**3次の混合テンソルの成分**と呼ぶ．さらにまた

$$T_{\mu'\lambda'\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa}_{\kappa'} T_{\mu\lambda\kappa}$$

という変換を受ける n^3 個の関数 $T_{\mu\lambda\kappa}$ を，**3次の共変テンソルの成分**と呼ぶ．したがって不変量は0次のテンソル，反変ベクトルは1次の反変テンソル，共変ベクトルは1次の共変テンソルである．

1.8　テンソルの加法，乗法，および縮約

いまここに同種類の2つの**テンソル**，たとえば $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ および $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ があるとして，それらの成分の和を成分とする量

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

を作れば，$T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ は $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$, $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ と同種類の1つのテンソルの成分である．なぜなら $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ および $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ はそれぞれテンソルの成分なのであるから，変数の斉1次変換に対する変換法則は

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

および

$$S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

したがって，これらを辺々相加えて

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\lambda'} + S_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} (R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}),$$

すなわち

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A^{\mu}_{\mu'} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\kappa'}_{\kappa} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

を得るからである．このようにして1つの新しいテンソルを作ることを，2つの**テンソルの和**を作るという．

これと全く同じ論法によって

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} - S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

のような同種類のテンソルの成分の差は，また1つのこれと同種類の新しいテンソルの成分であることが証明される．これを**テンソルの差**という．この2つのテソルの和および差は，同種類のテンソルでさえあれば，どんな次数のテンソルに対しても定義される．もちろん2つのベクトル u^{κ} と v^{κ} の和 $u^{\kappa}+v^{\kappa}$，または差 $u^{\kappa}-v^{\kappa}$ も，この定義のなかに含まれている．

この事実によれば，

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

のように2つの同種類のテンソルの成分を等しいと置いた式はいわゆる**テンソル方程式**である．すなわちこの式がある1つの変数系に対して成立しているとすれば，これから斉1次変換によって導かれる他のいかなる変数系に対してもまた，この方程式は成立するのである．なぜなら，ある変数系で $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ ということは，テンソル

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} - S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

の成分が，その変数系に対しては全部0ということである．ところが，テンソルの成分の変換式から明らかなように，このようなテンソルの成分はどんな変数系に対してもまた全部0となるからである．

次に任意の型のテンソルを2つ，たとえば反変ベクトル R^{κ} と2次の共変テンソル $S_{\mu\lambda}$ とを考えてみよう．いまこれらの成分を全部互いに掛け合わせて

$$R^{\kappa}S_{\mu\lambda} = T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$$

を作れば，こうして得られる量 $T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$ はまた1つのテンソルの成分である．なぜなら R^{κ} および $S_{\mu\lambda}$ はいずれもテンソルの成分なのであるから，変数の変換に対してはそれぞれ

$$R^{\kappa'}=A^{\kappa'}_{\kappa}R^{\kappa},$$

$$S_{\mu'\lambda'}=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}S_{\mu\lambda}$$

という変換を受ける．したがってこの2つの式を掛け合わせれば

$$R^{\kappa'}S_{\mu'\lambda'}=A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}R^{\kappa}S_{\mu\lambda}$$

すなわち

$$T^{\kappa'}{}_{\mu'\lambda'}=A^{\kappa'}_{\kappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$$

を得るからである．このように任意の型の2つのテンソルの成分を掛け合わせて,新しいテンソルの成分を作ることを**2つのテンソルの積**を作るという.

2つのテンソルのうちの一方がスカラーになった場合でも，上述の積は作り得る．たとえば1つのスカラー ρ と1つの反変ベクトル v^{κ} との積 ρv^{κ} はまた1つの反変ベクトルである．一般にあるテルソンに1つのスカラーを掛けても，前と同種類のテンソルが得られる.

加法および乗法という2つの代数的演算のほかに，テンソル代数学には縮約と呼ばれる独特な演算がある．いま一例として4次の混合テンソル $T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ をとろう．$T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ が1つのテンソルの成分であるというなら，これらの量は変数の斉1次変換に対して

$$T_{\nu'\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}=A^{\nu}_{\nu'}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\kappa'}_{\kappa}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

という変換を受ける．この式において $\kappa'=\nu'$ とおき，この指標に対して $1'$ から n' までの総和を求めてみれば，我々は

$$\begin{aligned}T_{\nu'\mu'\lambda'}{}^{\nu'}&=A^{\nu}_{\nu'}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}A^{\nu'}_{\kappa}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}\\&=\delta^{\nu}_{\kappa}A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}\\&=A^{\mu}_{\mu'}A^{\lambda}_{\lambda'}T_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu}\end{aligned}$$

を得る．この式は $T_{\nu\mu\lambda}{}^{\nu}$ がまた1つの新しい2次の共変テンソルの成分であることを示している.

このように1つのテンソルの成分において，1つの，右上の指標，すなわち**反変指標**と，1つの右下の指標，すなわち**共変指標**とを等しいとおいて，1からnまでの総和を求め，2つ指標の少ない新しいテンソルを作ることを，このテンソルをこれらの2つの指標に関して**縮約**するという．

上に説明したテンソルの乗法と縮約とは，これを続けて同時に行なうこともできる．たとえば2つのテンソル$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$と$S^{\omega\nu}$を用いて先ずその積$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\omega\nu}$を作り，次に指標$\mu$と$\omega$に関して縮約を行なって$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\nu}$を作り，さらに指標$\lambda$と$\nu$に関して縮約を行なって$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda}$を作るというようにである．

1.9　テンソルに関する1つの定理

前節の終りに説明したように，$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$と$S^{\omega\nu}$がともにテンソルの成分であるというなら，これから乗法と縮約を組み合わせた演算によって得られる

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda}=T^{\kappa}$$

もまた1つのテンソルの成分である．それならば$S^{\mu\lambda}$とT^{κ}がテンソルの成分であるとき，上の$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$は果たしてテンソルの成分になるであろうか．これに関しては次の定理が成立する．

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda}=T^{\kappa}$$

において，$S^{\mu\lambda}$を任意のテンソルの成分とするとき，T^{κ}もまたつねにテンソルの成分となるというなら，$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$もまた1つのテンソルの成分である．

なぜなら，いま変換の斉1次変換を行なった場合に，$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$，$S^{\mu\lambda}$，$T^{\kappa}$がそれぞれ$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}$，$S^{\mu'\lambda'}$，$T^{\kappa'}$に変換されたものとすれば

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}S^{\mu'\lambda'}=T^{\kappa'}=A_{\kappa}^{\kappa'}T^{\kappa}=A_{\kappa}^{\kappa'}R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}S^{\mu\lambda},$$

また一方

$$S^{\mu'\lambda'}=A_{\mu}^{\mu'}A_{\lambda}^{\lambda'}S^{\mu\lambda}$$

したがって

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} S^{\mu\lambda} = A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} S^{\mu\lambda}$$

すなわち

$$(R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} - A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}) S^{\mu\lambda} = 0$$

を得る．ところが $S^{\mu\lambda}$ はまったく任意な量であるから上式から

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} A_{\mu}^{\mu'} A_{\lambda}^{\lambda'} = A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}.$$

この式を $R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}$ に関して解けば

$$R_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = A_{\mu'}^{\mu} A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\kappa}^{\kappa'} R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

この式は $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ が1つのテンソルの成分であることを示しているのであるから，我々の定理はこれで証明されたわけである．上の定理および証明は特別な型のテンソルに対して述べたが，この定理が一般の型のテンソルに対しても成立することは明らかであろう．

上の定理の特別な場合である次の定理は非常にしばしば利用される．すなわち

u_{κ}, v^{μ}, w^{λ} を3つのまったく任意なそれぞれ共変および反変ベクトルの成分とするとき

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} u_{\kappa} v^{\mu} w^{\lambda}$$

がつねに不変量であるというなら，$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ は1つのテンソルの成分である．

この定理も一般の型のテンソルに対してあてはまることはもちろんである．

1.10　ベクトルの1次独立性

いまここに m 個の反変ベクトル $h_{(1)}^{\kappa}, \cdots, h_{(2)}^{\kappa}, \cdots, h_{(m)}^{\kappa}$ があるとき，方程式

$$c_{(1)} h_{(1)}^{\kappa} + c_{(2)} h_{(2)}^{\kappa} + \cdots\cdots + c_{(m)} h_{(m)}^{\kappa} = 0$$

を満足する全部は0でない m 個の数 $c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots, c_{(m)}$ が存在するならば，m 個のベクトル $h_{(1)}^{\kappa}, h_{(2)}^{\kappa}, \cdots, h_{(m)}^{\kappa}$ は**1次的従属**であるといわれる．これに反して上式を成立させるような全部は0でない m 個の数 $c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots, c_{(m)}$ が存

在しないならば，すなわち，言葉をかえていえば，上式が成立するのは $c_{(1)} = c_{(2)} = \cdots = c_{(m)} = 0$ の場合に限るというのであれば，m 個のベクトル $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(m)}$ は**1次的に独立**であるといわれる．

さて m 個のベクトル $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(m)}$ が1次独立であるための必要十分条件は何かというと

$$c_{(1)}h^{\kappa}_{(1)} + c_{(2)}h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(m)}h^{\kappa}_{(m)} = 0$$

すなわち

$$\begin{aligned}
c_{(1)}h^{1}_{(1)} + c_{(2)}h^{1}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(m)}h^{1}_{(m)} &= 0,\\
c_{(1)}h^{2}_{(1)} + c_{(2)}h^{2}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(m)}h^{2}_{(m)} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
c_{(1)}h^{n}_{(1)} + c_{(2)}h^{n}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(m)}h^{n}_{(m)} &= 0
\end{aligned}$$

が成立するのは $c_{(1)} = c_{(2)} = \cdots = c_{(m)} = 0$ の場合に限るというのであるから，代数学においてよく知られた定理によって，行列

$$\begin{pmatrix}
h^{1}_{(1)}, & h^{1}_{(2)}, & \cdots\cdots, & h^{1}_{(m)}\\
h^{2}_{(1)}, & h^{2}_{(2)}, & \cdots\cdots, & h^{2}_{(m)}\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
h^{n}_{(1)}, & h^{n}_{(2)}, & \cdots\cdots, & h^{n}_{(m)}
\end{pmatrix}$$

の階数が m であることが，$h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots\cdots, h^{\kappa}_{(m)}$ が1次独立であるための必要十分条件である．したがって n 次元の空間においては，たかだか n 個の1次独立なベクトルが存在するわけである．すなわち n 次元の空間内に $n+1$ 個のベクトルをとれば，それらは必ず1次従属である．いま $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ を1次独立な n 個のベクトルとし，v^{λ} を任意の1つのベクトルとすれば $v^{\kappa}, h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ という $n+1$ 個のベクトルは必ず1次従属である．したがって

$$c_{(0)}v^{\kappa} + c_{(1)}h^{\kappa}_{(1)} + c_{(2)}h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(n)}h^{\kappa}_{(n)} = 0$$

を満足する全部は0でない $n+1$ 個の数 $c_{(0)}, c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots, c_{(n)}$ が存在するはずである．ここに $c_{(0)}$ は0でない．なぜなら $c_{(0)} = 0$ とすれば，方程式

$$c_{(1)}h^{\kappa}_{(1)} + c_{(2)}h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + c_{(n)}h^{\kappa}_{(n)} = 0$$

が全部は 0 でない n 個の数 $c_{(1)}, c_{(2)}, \cdots, c_{(n)}$ に対して成立することとなり, $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ が 1 次独立という仮定に反するからである．$c_{(0)} \neq 0$ ならば上式を v^{κ} について解くことができて

$$v^{\kappa} = -\frac{c_{(1)}}{c_{(0)}}h^{\kappa}_{(1)} - \frac{c_{(2)}}{c_{(0)}}h^{\kappa}_{(2)} - \cdots\cdots - \frac{c_{(n)}}{c_{(0)}}h^{\kappa}_{(n)}$$

が得られる．すなわち任意のベクトル v^{κ} は 1 次独立な n 個のベクトル $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ の 1 次結合として

$$\boldsymbol{v}^{\kappa} = \boldsymbol{v}_{(1)}\boldsymbol{h}^{\kappa}_{(1)} + \boldsymbol{v}_{(2)}\boldsymbol{h}^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + \boldsymbol{v}_{(n)}\boldsymbol{h}^{\kappa}_{(n)}$$

という形に書き表わされる．しかも $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ さえ与えられていれば, ここに現われる係数 $v_{(1)}, v_{(2)}, \cdots, v_{(n)}$ はただ一通りに決定される．なぜなら

$$v^{\kappa} = v_{(1)}h^{\kappa}_{(1)} + v_{(2)}h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + v_{(n)}h^{\kappa}_{(n)}$$

以外にもう 1 つ

$$v^{\kappa} = v'_{(1)}h^{\kappa}_{(1)} + v'_{(2)}h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + v'_{(n)}h^{\kappa}_{(n)}$$

という表わし方があったとして，この両式を辺々相減ずれば

$$0 = (v_{(1)} - v'_{(1)})h^{\kappa}_{(1)} + (v_{(2)} - v'_{(2)})h^{\kappa}_{(2)} + \cdots\cdots + (v_{(n)} - v'_{(n)})h^{\kappa}_{(n)}$$

を得るが，この $h^{\kappa}_{(1)}, h^{\kappa}_{(2)}, \cdots, h^{\kappa}_{(n)}$ は 1 次独立という仮定から

$$v_{(1)} = v'_{(1)},\ \ v_{(2)} = v'_{(2)},\ \ \cdots\cdots,\ \ v_{(n)} = v'_{(n)}$$

となってしまうからである．

1.11 一般の変数変換

本節では変数 x^{κ} を変数 $x^{\kappa'}$ に変換する変換が，一般の関数

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n)$$

で与えられる場合を考えよう．

ただし我々はここに n 個の関数 $x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ は変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ に

関して適当な回数まで偏微分可能であって，$x^1, x^2, \cdots, x^n$ に関して

$$x^\kappa = x^\kappa(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'})$$

という具合に逆に解き得るものと仮定する．

このように $x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ が変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ に関して逆に解き得るために必要にしてかつ十分な条件は，良く知られているように行列式

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

が我々の考えている変数のとり得る値の範囲内で 0 にならないということである．上の行列式は関数 $x^{\kappa'}$ の変数 x^κ に関する**関数行列式**または**ヤコビヤン**と呼ばれる．この関数行列式は簡単に

$$\frac{\partial(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, \cdots, x^{n'})}{\partial(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n)} \quad \text{または} \quad \left|\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right| \quad \text{または} \quad \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$$

で表わされることがある．

この関数行列式が 0 にならない場合には，n 個の関数 $x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ は独立であるといわれる．この場合には n 個の関数

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

が変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ に関して解き得られるのである．

いま関数

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

によって変数 x^κ を変数 $x^{\kappa'}$ に変換し，関数

$$x^{\kappa''} = x^{\kappa''}(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'})$$

によって変数 $x^{\kappa'}$ を変数 $x^{\kappa''}$ に変換したものとすれば，$x^{\kappa''}$ を間接に x^κ

で偏微分することによって

$$\frac{\partial x^{\kappa''}}{\partial x^{\kappa}}=\frac{\partial x^{\kappa''}}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$$

を得る．したがって $x^{\kappa'}$ の x^{κ} に関する関数行列式 $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ と，$x^{\kappa''}$ の $x^{\kappa'}$ に関する関数行列式 $\left|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right|$ と，$x^{\kappa''}$ の x^{κ} に関する関数行列式 $\left|\frac{\partial x''}{\partial x}\right|$ との間には

$$\left|\frac{\partial x''}{\partial x}\right|=\left|\frac{\partial x''}{\partial x'}\right|\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$$

という関係式のあることがわかる．

いま上の関係式において

$$x^{\kappa''}=x^{\kappa}$$

とおけば

$$\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\nu}}=\delta^{\kappa}_{\nu}$$

であるから

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}=\delta^{\kappa}_{\nu},$$

したがって

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|=1$$

を得る．

1.12　一般の変数変換に対する不変量，ベクトル，およびテンソル

我々は **1.6** と **1.7** 節において変数の斉１次変換に対するスカラー，ベクトル，テンソル等を定義した．このような定義を変数の一般の変換に対しても拡張し得るかというのが本節の問題である．

（i）　**不変量**　　いまここに変数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ の関数

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

があって，この関数は変数の一般の変換

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

を行なってもその値を変えない，すなわち

$$f'(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'}) = f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

であるとき，$f(x^1, \cdots, x^n)$ を**不変量**または**スカラー**の**成分**と呼ぶ．

(ii)　反変ベクトル　　変数の一般の変換を与える関数

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

の両辺の微分を考えれば

$$dx^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^2}dx^2 + \cdots\cdots + \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^n}dx^n,$$

すなわち

$$dx^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}dx^{\kappa}$$

を得る．また変数の変換を与える公式を逆に解いた

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}(x^{1'}, x^{2'}, \cdots, x^{n'})$$

の両辺の微分をとれば

$$dx^{\kappa} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{1'}}dx^{1'} + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{2'}}dx^{2'} + \cdots\cdots + \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{n'}}dx^{n'},$$

すなわち

$$dx^{\kappa} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}dx^{\kappa'}$$

となる．

言葉を変えていえば，変数が全く一般な変換を受けた場合でも，その変数の微分は，1つの斉1次変換を受けるのである．ただ前数節において説明した斉1次変換と本質的に異なる点は，係数 $\dfrac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$ または $\dfrac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}$ がまえの $A_{\kappa}^{\kappa'}$ または $A_{\kappa'}^{\kappa}$ のように，必ずしも定数ではなくて，一般に変数の関数であるという点である．

しかし我々はベクトルという考えを一般の変数変換にまで拡張して dx^{κ} と同一の変換を受ける n 個の量を1つの**反変ベクトル**の**成分**と呼ぶことにする．すなわち n 個の変数 x^{κ} の n 個の関数 $v^{\kappa}(x)$ があって，変数 x^{κ} の変換

に対しては

$$v^{\kappa'}(x')=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}v^{\kappa}(x)$$

という変換を受けるとき，これらの n 個の関数を 1 つの反変ベクトルの成分と呼ぶ．

(iii)　**共変ベクトル**　我々はすでに (i) において不変量の成分 $f(x)$ の一般の変数変換に対する変換式は

$$f'(x')=f(x)$$

であることを学んだ．いま，この式を変数 $x^{\lambda'}$ で偏微分してみよう．実際に計算を行なえば

$$\frac{\partial f'}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial x^{\lambda'}}+\frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial x^{\lambda'}}+\cdots\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial x^{\lambda'}},$$

すなわち

$$\frac{\partial f'}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}$$

となる．したがって $\dfrac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}$ という n 個の関数もやはり 1 つの斉 1 次変換を受けるわけである．ただし係数は必ずしも定数ではない．しかもこれは dx^{κ} の変換式とちょうど逆の関係になっている．この事実を dx^{κ} の変換式と $\dfrac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}$ の変換式とは互いに**反傾的**であるという．

さて我々は前の例にならって $\dfrac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}$ と同一の変換を受ける n 個の関数を**共変ベクトルの成分**と定義する．すなわち変数 x^{κ} の n 個の関数 $v_{\lambda}(x)$ があって，変数の一般の変換に対しては

$$v_{\lambda'}(x')=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}v_{\lambda}(x)$$

という変換を受けるとき，このような n 個の関数を**共変ベクトル**の**成分**と呼ぶ．前に述べたところの不変量をそれぞれの変数で偏微分して得られる n 個の関数は，共変ベクトルの成分の一例である．このように不変量を偏微分して得られる共変ベクトルを普通**勾配ベクトル**と呼んでいる．

(iv)　テンソル　　すでに不変量，反変ベクトル，共変ベクトルの考えを一般の変数変換にまで拡張し得たのであるから，テンソルの概念をも一般の変数変換にまで拡張することは容易であろう．

たとえば $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}(x)$ のような指標を 3 つもった n^3 個の関数があって，一般の変数の変換に対して

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}(x') = \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}(x)$$

という変換を受けるならば，$T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}(x)$ を**テンソルの成分**と呼ぶ．正確にいえば $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ は κ に関して反変，μ と λ に関し共変な 3 次の混合テンソルである．この場合 κ を**反変指標** μ と λ を**共変指標**と呼ぶことは前にも述べた．

一般に反変指標のみをもつテンソルを**反変テンソル**，共変指標のみをもつテンルを**共変テンソル**，反変指標と共変指標の両方をもつテンソルを**混合テンソル**と呼ぶ．

ここでは，後で非常にしばしば現われる 2 次のテンソルについて，少しく詳細な説明をしておこう．

2 次のテンソルにも 3 種類あるが，その 3 種類を挙げてみれば次の通りである．

2 次の反変テンソル $T^{\lambda\kappa}$,

その変換法則　　$$T^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} T^{\lambda\kappa}.$$

2 次の混合テンソル $T_{\lambda}{}^{\kappa}$,

その変換法則　　$$T_{\lambda'}{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} T_{\lambda}{}^{\kappa},$$

2 次の共変テンソル $T_{\mu\lambda}$,

その変換法則　　$$T_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\lambda},$$

一般に 1 つのテンソル $T_{\mu\lambda}$ が

$$T_{\mu\lambda} = T_{\lambda\mu}$$

という条件を満足していれば，このテンソルは μ と λ に関して**対称**，

$$T_{\mu\lambda} = -T_{\lambda\mu}$$

という条件を満足していれば，μ と λ に関して**交代**というのであるが，いま μ と λ に関して対称なテンソル

$$g_{\mu\lambda}$$

をとって説明を続けよう．変数の変換

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

に対する $g_{\mu\lambda}$ の変換法則は

$$g_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda}$$

である．したがって $g_{\mu\lambda}$ を元素とする行列式

$$g = \begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots\cdots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots\cdots, & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots\cdots, & g_{nn} \end{vmatrix}$$

を考えれば，その変換法則は

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \cdot g,$$

すなわち

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g$$

となる．一般に変数変換に対し，上のような変換を受ける量 g を重さ 2 の**密度**という．

いま元素 $g_{\mu\lambda}$ の行列式における余因数を $G^{\lambda\mu}$ とおけば

$$g_{\mu\lambda} G^{\lambda\kappa} = g\delta^{\kappa}_{\mu}$$

であることはすでに説明した．$g_{\mu\lambda}$ が μ と λ に関して対称ならば，ここに現

れる $G^{\lambda\kappa}$ もまた λ と κ に関して対称であることは明らかであろう．さていま $g \neq 0$ と仮定して

$$\frac{G^{\lambda\kappa}}{g} = g^{\lambda\kappa}$$

とおけば，前式から

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\kappa} = \delta^{\kappa}_{\mu}$$

を得る．ところが $g_{\mu\lambda}$ が2次の共変テンソルなら，このようにして定義された $g^{\lambda\kappa}$ は今度は2次の反変テンソルとなる．

これを以下に説明しよう．

まず一般の変数の変換を行なった場合に，上式が

$$g_{\mu'\lambda'}\, g^{\lambda'\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\mu'}$$

となったとしよう．ところが $g_{\mu\lambda}$ は共変テンソルの成分なのであるから

$$g_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda}.$$

これを上式に代入して

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda'\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\mu'}$$

この式の両辺に $\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\omega}}$ を掛けて，μ' に関して $1'$ から n' までの総和を求めれば

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\omega}} \delta^{\kappa'}_{\mu'}, \quad \delta^{\mu}_{\omega} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}},$$

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\omega\lambda}\, g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}}.$$

次に，この式の両辺に $g^{\nu\omega}$ を掛けて ω に関して1から n までの総和を求めれば

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} g_{\omega\lambda}\, g^{\nu\omega}\, g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega}, \quad \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \delta^{\nu}_{\lambda}\, g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega},$$

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda'}} g^{\lambda'\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}} g^{\nu\omega}.$$

さらに，この式の両辺に $\dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}$ を掛けて ν に関して1から n までの総和を求めれば

$$\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\lambda'}}g^{\lambda'\kappa'}=\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\omega}}g^{\nu\omega},\quad \delta^{\nu'}_{\lambda'}g^{\lambda'\kappa'}=\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}g^{\nu\kappa},$$

$$g^{\nu'\kappa'}=\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}g^{\nu\kappa}$$

を得る．この式は $g^{\nu\kappa}$ が1つの反変テンソルの成分であることを示しているのであるから，これで我々の主張は証明できたわけである．この $g^{\nu\kappa}$ を，共変テンソル $g_{\mu\lambda}$ に**共役な**反変テンソルと呼ぶ．

1.13 一般の変数変換に対するテンソルの加法，乗法，および縮約

変数の斉1次変換に対するテンソルの加法，乗法，および縮約についてはすでに**1.8**節で説明した．これとそっくり同じことが，一般の変数変換に対するテンソルの加法，乗法，および縮約にもあてはまるのである．これを以下に簡単に説明しよう．

(i) **加　法**　2つの同種類のテンソル，たとえば $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ と $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ があるとき，そのおのおのの成分の和を成分とする量

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}+S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

はやはり $R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ および $S_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ と同種類のテンソルの成分である．これを2つのテンソルの和と呼ぶ．証明は**1.8**節における $A^{\kappa'}_{\kappa}$ の代わりに $\dfrac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$，$A^{\kappa}_{\kappa'}$ の代わりに $\dfrac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}$ を用いるだけで**1.8**節におけるものと全然同一であるから省略することにする．

(ii) **乗　法**　2つのテンソル，たとえば $R_{\nu\mu}$ および $S_{\lambda}{}^{\kappa}$ があるとき，これらの成分の積を成分とする量

$$R_{\nu\mu}S_{\lambda}{}^{\kappa}=T_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

を考えれば，これもまた1つのテンソルの成分となる．これを2つの**テンソルの積**と呼ぶ．

(iii) **縮　約**　たとえばここに1つの混合テンソル $T_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ がある場合，

指標 κ と μ を等しいとおいて 1 から n までの総和を求めて

$$T_{\mu\lambda}{}^{\mu} = T_{\lambda}$$

とおけば，我々は最初のテンソルより 2 つ指標の少ないテンソルを得る．この演算を指標 κ と μ に関する縮約と呼ぶ．

いまここに 1 つの反変ベクトル u^{κ} と共変ベクトル v_{λ} がある場合，これらの積

$$u^{\kappa} v_{\lambda}$$

を作れば，ここに 1 つの 2 次の混合テンソルが得られる．ここにおいて指標 κ と λ に関する縮約を行なって

$$u^{\lambda} v_{\lambda}$$

を作れば，指標の 2 つ少ないテンソル，すなわち不変量を得る．これを反変ベクトル u^{κ} と共変ベクトル v_{λ} の**内積**と呼ぶ．

1.14　一般の変数変換に対するテンソルに関する 1 つの定理

一般の変数変換に対するテンソルに対しても **1.9** 節において述べた定理が成立する．証明は前と全然同様の方法でできるから，ここに結果だけもう一度記しておこう．たとえば

$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ が n^3 個の関数であり，任意のテンソル $S^{\mu\lambda}$ に対して

$$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} S^{\mu\lambda} = T^{\kappa}$$

がつねにテンソル(この例では実はベクトル)であれば，$R_{\mu\lambda}{}^{\kappa}$ もまた 1 つのテンソルの成分である．この場合 $S^{\mu\lambda}$ が対称テンソルであれば，$\frac{1}{2}(R_{\mu\lambda}{}^{\kappa} + R_{\lambda\mu}{}^{\kappa})$ がテンソルの成分となる．

いま，この定理の応用として 2 次微分形式

$$g_{\mu\lambda}\, dx^{\mu}\, dx^{\kappa\lambda}$$

を考えてみよう．ここに $g_{\mu\lambda}$ は一般に変数 x^{κ} の関数であるが，2 次形式の係数なのであるから

$$g_{\mu\lambda}=g_{\lambda\mu},$$

すなわちμとλに関して対称と仮定しても一般性を失わない．

さて，いま2次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ は1つの不変量，すなわち，スカラーであると仮定しよう．そうするとこの2次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ の係数 $g_{\mu\lambda}$ は1つの2次の共変テンソルの成分となる．なぜなら変数の微分 dx^{μ} は1つの反変ベクトルの成分である．したがって $dx^{\mu}dx^{\lambda}$ は1つの2次の対称反変テンソルの成分である．ところが

$$g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$$

が常に1つの不変量なのであるから，まえの定理によって

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda}+g_{\lambda\mu})=g_{\mu\lambda}$$

は1つの共変テンソルの成分となる．

この事実はまたこれを次のように直接証明することもできる．変数の変換

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

を行なった場合，2次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$ が変換されて $g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}$ となったものとすれば，この2次微分形式が不変量であるという仮定によって

$$g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}=g_{\mu\lambda}dx^{\mu}dx^{\lambda}$$

を得る．しかるに

$$dx^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}dx^{\mu'},\qquad dx^{\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}dx^{\lambda'}$$

に注意すれば，上式はまた

$$g_{\mu'\lambda'}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}=g_{\mu\lambda}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}dx^{\mu'}dx^{\lambda'}$$

となる．しかるに $dx^{\mu'}$, $dx^{\lambda'}$ は任意なのであるから，上式から

$$g_{\mu'\lambda'}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\lambda}$$

を得る．これは $g_{\mu\lambda}$ が1つの2次の共変テンソルの成分であることを示している．

2 章

リーマン空間

2.1 リーマンの計量，基本テンソル

3 次元のユークリッド空間において，直角座標がそれぞれ (x, y, z) および $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ で与えられるような非常に近い 2 点間の距離 ds は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

で与えられる．いまもし

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

で与えられる極座標を用いたとすれば，ds^2 を与える上の公式は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d^2\theta + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

となる．さらにまた 3 次元のユークリッド空間内に媒介変数表示

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

で与えられる 2 次元の曲面を考えれば，媒介変数の値がそれぞれ (u, v) および $(u+du,\ v+dv)$ に相当する曲面上の非常に近い 2 点 (x, y, z) および

$$\left(x + \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad y + \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,\quad z + \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)$$

間の距離 ds は

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

で与えられる．

ただし

$$\begin{cases} E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ G=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

このいずれの例をみても，非常に近い2点間の距離 ds の2乗は，座標の微分の2次形式である．

この考えを拡張してリーマンは有名な論文 B. Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, (1854), Habilitationsschrift. において

座標系をともなった近傍，すなわち座標近傍でおおわれ，1つの座標近傍において，座標がそれぞれ（x^κ）および（$x^\kappa+dx^\kappa$）である2点間の無限小距離 ds が，座標の微分の2次形式

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

で与えられるような n 次元の多様体

を考えている．我々は上のような2次微分形式で与えられる計量を**リーマンの計量**と呼び，計量がリーマンの計量で与えられるような空間を**リーマン空間**と呼ぶ．リーマン空間およびそのなかに含まれる図形の性質を研究する科学が**リーマン幾何学**である．

さて，我々は ds を

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

で定義したのであるから，2次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ はつねに正または0でなければ，ds はつねに実数とはならない．したがって我々は2次微分形式 $g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ は正値2次形式であると仮定する．そうすると2次形式に関するよく知られた定理によって，係数 $g_{\mu\lambda}$ から作られた行列式 g は

$$g = \begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & \cdots\cdots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \cdots\cdots, & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \cdots\cdots, & g_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

であって決して0とならないことがわかる．

特殊および一般相対性理論にリーマン幾何学を応用する場合には，必ずしも正値2次形式ではない2次微分形式で計量が与えられるようなリーマン空間を考えなければならないのであるが，まず，リーマン幾何学の何たるかを知ろうとするのには，上のような仮定から出発するのが自然なことであろう．

さて上に定義した ds は2点間の距離であって純幾何学的な概念なのであるから，座標の変換

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

を施こしても不変な量でなければならない．すなわち ds または ds^2 は1つの不変量でなければならない．$ds^2 = g_{\mu\lambda}\,dx^\mu\,dx^\lambda$ が1つの不変量であるというなら，1章の最後に説明した事実によって $g_{\mu\lambda}$ は μ と λ に関して対称な1つの共変テンソルの成分となる．この共変テンソルを我々はリーマン空間の**基本共変テンソル**と呼ぶ．更にこの基本共変テンソルの成分を要素として作った n 行 n 列の行列式 g の値は0でないというのであるから，1章の**1.12**節で証明した定理によって

$$g_{\mu\lambda}\,g^{\lambda\kappa} = \delta^\kappa_\mu$$

を満足する λ と κ に関して対称な1つの反変テンソル $g^{\lambda\kappa}$ を見出すことができる．これをリーマン空間の**基本反変テンソル**と呼ぶ．

この基本共変および反変テンソル $g_{\mu\lambda}$ および $g^{\lambda\kappa}$ を用いれば，1つの反変ベクトル v^κ から共変ベクトル v_λ を，1つの共変ベクトル v_λ から反変ベクトル v^κ を次のようにして作ることができる．

$$v_\lambda = v^\mu g_{\mu\lambda}, \qquad v^\kappa = v_\lambda\,g^{\lambda\kappa}.$$

この演算はこれをテンソルに対して行なうこともできる．たとえば

$$T_{\mu\lambda}{}^{\kappa} = T_{\mu\lambda\alpha} g^{\alpha\kappa}, \qquad T_{\mu\lambda\kappa} = T_{\mu\lambda}{}^{\alpha} g_{\alpha\kappa}.$$

これを $g^{\lambda\kappa}$ を用いて共変指標を上にあげる，$g_{\mu\lambda}$ を用いて反変指標を下にさげるという．基本テンソルを用いて上にあげた指標をまた下にさげ，下にさげた指標をまた上にあげると，もとに戻る．なぜなら，たとえば

$$v^{\kappa} = v^{\alpha}\delta_{\alpha}^{\kappa} = v^{\alpha}(g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\kappa}) = (v^{\alpha} g_{\alpha\lambda}) g^{\lambda\kappa}$$

であるからである．

したがって基本テンソルの存在するリーマン空間においては，反変テンソル，混合テンソル，共変テンソルの区別が存在するのではなく，1つのテンソルの反変成分，混合成分，共変成分が存在するのである，と考えるのが至当である．

たとえば

v^{κ} で表わされる幾何学的対象と

v_{λ} で表わされる幾何学的対象

とはいずれもベクトルと呼ばれる同じものであるが，1つは v^{κ} という反変成分でこれを表わし，他は v_{λ} という共変成分でこれを表わしたのであって，v^{κ} と v_{λ} の関係は

$$v^{\kappa} = v_{\lambda} g^{\lambda\kappa}, \qquad v_{\lambda} = v^{\alpha} g_{\alpha\lambda}$$

で与えられると考えるのである．

2.2 曲線の長さ，ベクトルの長さ

我々のリーマン空間中の点を表わす座標 x^{κ} が1つの媒介変数 t の関数として与えられれば，すなわち

$$x^{\kappa} = x^{\kappa}(t)$$

と与えられれば，媒介変数の値 t および $t + dt$ に対応する曲線上の2点

$$x^\kappa(t), \qquad x^\kappa(t)+\frac{dx^\kappa}{dt}dt$$

間の距離 ds は

$$ds=\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}}dt$$

で与えられる．したがって $t=t_1$ に対する曲線上の点から $t=t$ に対する曲線上の点までの曲線の孤の長さは，積分

$$s=\int_{t_1}^{t}\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}}dt$$

で与えられる．いま，このように定義される s を曲線の媒介変数にとれば

$$g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=1$$

という恒等式が得られる．

さて，ds を定義する式

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

の意味をよく考えてみると，これは点 x^κ から点 $x^\kappa+dx^\kappa$ に向かう成分が dx^κ である反変ベクトルの長さが ds になることを示す式にほかならない．

これと同様に 1 つのベクトルの反変成分を u^κ とすれば

$$(u)^2=g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda$$

で与えられる不変量 u を**ベクトル u^κ の長さ**と定義する．したがって

$$1=g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}$$

という恒等式は，曲線への接線を表わすところの反変ベクトル $\dfrac{dx^\kappa}{ds}$ の長さが 1 であることを示しているわけである．このように長さが 1 であるベクトルのことを我々は**単位ベクトル**と呼ぶ．

さて，あるベクトルの反変成分を u^κ とすれば，その共変成分 u_λ は

$$u_\lambda=u^\alpha g_{\alpha\lambda}$$

で与えられる．したがって，このベクトルの長さを与える式 $(u)^2=g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda$

はまた

$$(u)^2 = u_\lambda u^\lambda$$

とも書かれる．さらに

$$u^\kappa = u_\lambda g^{\lambda\kappa}$$

に注意すれば，上式はまた

$$(u)^2 = g^{\lambda\kappa} u_\lambda u_\kappa$$

とも書かれる．

2.3　2つのベクトル間の角

3次元のユークリッド空間中に1つの直交軸をとれば，方向余弦がそれぞれ (l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2) である2つの方向のなす角 θ は

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

で与えられる．ここに (l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2) はそれぞれ

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad \text{および} \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

を満足しているのであるから，いずれも1つの単位ベクトルの成分と考えられる．

また3次元のユークリッド空間中に1つの斜交軸をとって，そのなす角をそれぞれ α, β, γ とすれば，方向余弦がそれぞれ (l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2) である2つの方向がなす角 θ は

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 + \cos\alpha(m_1 n_2 + m_2 n_1)$$
$$+ \cos\beta(n_1 l_2 + n_2 l_1) + \cos\gamma(l_1 m_2 + l_2 m_1)$$

で与えられる．ここに (l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2) はそれぞれ

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + 2\cos\alpha m_1 n_1 + 2\cos\beta n_1 l_1 + 2\cos\gamma l_1 m_1 = 1$$

および $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 + 2\cos\alpha m_2 n_2 + 2\cos\beta n_2 l_2 + 2\cos\gamma l_2 m_2 = 1$

を満足しているのであるから，いずれも1つの単位ベクトルの成分と考えられる．

これらを思い合わせれば，リーマン空間においても2つの単位ベクトル u^κ および v^κ のなす角 θ を

$$\cos\theta = g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda$$

で定義するのは極く自然なことであろう．この量が不変量，すなわち座標のとり方によって値を変えないこともまた明かであろう．しかしこの定義が意味をもつためには $g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda$ の絶対値が1より小さいということをまず示さなければならない．これを証明するために，$t\cdot u^\kappa + v^\kappa$ というベクトルの長さを考えてみれば，$g_{\mu\lambda}u^\lambda u^\mu = 1$, $g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda = 1$ という関係によって

$$g_{\mu\lambda}(t\cdot u^\mu + v^\mu)(t\cdot u^\lambda + v^\lambda) = t^2 + 2t\cdot g_{\mu\lambda}u^\mu\cdot v^\lambda + 1.$$

ところが，この式の左辺は t のどんな値に対しても負となることはない．したがって

$$t^2 + 2t\, g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda + 1$$

の判別式は負または0である．したがって

$$(g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda)^2 - 1 \leqq 0$$

この式は $g_{\mu\lambda}u^\mu v^\lambda$ の絶対値が1より小さいということを示している．これで上の角の定義が意味をもっていることが示された．

2つのベクトル u^κ および v^κ が単位ベクトルの場合は上のようにそのなす角を定義することができたが，いずれか一方または両方が単位ベクトルでない場合には，そのなす角をどのようにして定義することができるであろうか．この場合には u^κ および v^κ をそれぞれその長さで割って

$$\frac{u^\kappa}{\sqrt{(g_{\mu\lambda}u^\mu u^\lambda)}} \qquad \frac{v^\kappa}{\sqrt{(g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda)}}$$

として単位ベクトルに直して，のちにそのなす角を考えればよい．もちろんあるベクトルに，0でないどんな正の不変量を掛けても，またはこれで割っても前と同じ方向をもったベクトルを表わしているからである．上の2つの単位ベクトルのなす角 θ を求めれば

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda}{\sqrt{(g_{\mu\lambda} u^\mu u^\lambda)}\sqrt{(g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda)}}$$

となる．これが一般の2つのベクトル u^κ および v^κ のなす角 θ を定義する式である．u^κ および v^κ の長さをそれぞれ u, v とおけば，上式から

$$uv\cos\theta = g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda$$

を得る．この式の右辺はまた

$$g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda = u_\lambda v^\lambda = u^\mu v_\mu$$

とも書けるが，この不変量を2つのベクトル u^κ および v^κ の内積と呼ぶことは前にも述べた．すなわち2つのベクトルの内積とはそのおのおのの長さの積にそのなす角の余弦を掛けたものである．

とくに2つのベクトル u^κ と v^κ が垂直に交わる条件は $\theta = \frac{\pi}{2}$ から

$$g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda = 0 \quad \text{または} \quad u_\lambda v^\lambda = 0 \quad \text{または} \quad u_\lambda v_\lambda = 0$$

となる．

2.4 体 積 元 素

3次元のユークリッド空間において，なす角がそれぞれ α, β, γ であるような斜交軸 x, y, z をとれば，その体積元素 dV は

$$dV = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} dx\,dy\,dz$$

で与えられる．また媒介変数表示

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

で与えられるような2次元の曲面を考えれば，その上の面積元素 dS は

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} du\,dv$$

で与えられる．我々はこれらを拡張してリーマン空間における体積元素を

$$dV = \sqrt{g}\,dx^1 dx^2 \cdots\cdots dx^n$$

で定義する．しかし体積元素という考えは純幾学何的なものであるから，上の定義に用いた量が座標のとり方に関しない，すなわち不変量であることを証明しておかなければならない．ところが $dx^1 dx^2 \cdots\cdots dx^n$ という量は微積分学においてよく知られているように座標の変換

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

に対して

$$dx^{1'} dx^{2'} \cdots dx^{n'} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| dx^1 dx^2 \cdots dx^n$$

という変換を受ける．また $g_{\mu\lambda}$ を要素とする行列式 g は1章の **2.12** 節の (iv) で説明したように

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g$$

という変換を受ける．したがって $\left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right| > 0$ なら，その平方根 $\sqrt{g}$ は

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{g}$$

という変換を受ける．したがって $dx^1 dx^2 \cdots dx^n$ の変換式と $\sqrt{g}$ の変換式を掛け合わせて $\left|\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right| \cdot \left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right| = 1$ に注意すれば

$$\sqrt{g'}\, dx'^1 dx'^2 \cdots\cdots dx^{n'} = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \cdots\cdots dx^n$$

を得る．この式はリーマン空間において体積元素と定義された dV が確かに不変量であることを示している．座標近傍をつねに $\left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right| > 0$ であるように選び得る空間は**方向づけ可能**であるという．

2.5　変分法からの1つの予備定理

我々のリーマン空間中に2点 P, Q を通る曲線 $x^\kappa(t)$ を考えよう．P および Q は媒介変数の値 $t = t_1$, $t = t_2$ に相当する曲線上の点であるとする．

いまこの曲線に沿って1つの積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}F(x^1,x^2,\cdots,x^n;\ \dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)dt$$

を考える．ただし，ここに $\dot{x}^\kappa=\dfrac{dx^\kappa}{dt}$ であって，F は $2n$ 個の変数 x^κ および $\dot{x}^\kappa$ の関数であるとする．

次に曲線 $x^\kappa(t)$ に沿って積分 I を考える代わりに，やはり P, Q を通る $x^\kappa(t)$ とは非常に近い他の曲線

$$\bar{x}^\kappa(t)=x^\kappa(t)+\varepsilon\cdot v^\kappa(t),$$

ただし，ε は無限小の定数で

$$v^\kappa(t_1)=v^\kappa(t_2)=0,$$

に沿って上記の積分を考えて，これを $\bar{I}$ で示せば

$$\begin{aligned}\bar{I}&=\int_{t_1}^{t_2}F(x^1+\varepsilon\cdot v^1,\ x^2+\varepsilon\cdot v^2,\ \cdots\cdots,\ x^n+\varepsilon\cdot v^n;\\&\qquad\dot{x}^1+\varepsilon\cdot\dot{v}^1,\ \dot{x}^2+\varepsilon\cdot\dot{v}^2,\ \cdots\cdots,\ \dot{x}^n+\varepsilon\cdot\dot{v}^n)dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[F+\varepsilon\cdot\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda+\cdots\cdots\right]dt\\&=I+\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt+\cdots\cdots\end{aligned}$$

を得る．ただし，ここに $\dot{v}^\lambda=\dfrac{d}{dt}v^\lambda$ である．上式から

$$\bar{I}-I=\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt+\cdots\cdots$$

を得るが，この式の右辺の ε の係数を δI とおいて，部分積分法による計算を行なえば

$$\begin{aligned}\delta I&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\dot{v}^\lambda\right]dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}v^\lambda dt+\left[\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}v^\lambda\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\right)v^\lambda dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}^\lambda}\right)\right]v^\lambda dt\end{aligned}$$

を得る．いま $v^\lambda(t_1)=v^\lambda(t_2)=0$ を満足させるようなどんな関数 $v^\kappa(t)$ に対しても $\delta I=0$ となるとき，積分 I は曲線 $x^\kappa(t)$ に沿って**定常であるという**．したがって積分 I が曲線 $x^\kappa(t)$ に沿って定常であるための必要かつ十分な条件として

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^\lambda}=0$$

を得る．これは変分学において**オイラーの微分方程式**と呼ばれている方程式である．

2.6 測　地　線

計量が

$$ds^2=g_{\mu\lambda}\,dx^\mu\,dx^\lambda$$

で与えられる1つのリーマン空間において，1つの曲線 $x^\kappa(t)$ 上の1点 $x^\kappa(t_1)$ から他の1点 $x^\kappa(t_2)$ までの曲線の長さは積分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{\mu\lambda}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\lambda}\,dt$$

で与えられる．この積分の値を定常ならしめるような曲線 $x^\kappa(t)$ のことをリーマン空間の**測地線**と呼ぶ．これはちょうどユークリッド空間における直線の拡張になっている．いま，その微分方程式を求めてみよう．

$$F=\sqrt{g_{\mu\lambda}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\lambda}$$

をオイラーの微分方程式に代入すれば

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha}=\frac{g_{\mu\alpha}\,\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\lambda}}=\frac{g_{\mu\alpha}\,\dot{x}^\mu}{\dfrac{ds}{dt}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha}=\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\lambda}}=\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\lambda}{\dfrac{ds}{dt}}$$

であるから

$$\frac{g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\mu}{\dfrac{ds}{dt}}+\frac{\dfrac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}{\dfrac{ds}{dt}}-\frac{g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda}{\dfrac{ds}{dt}}=0,$$

すなわち

$$g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\mu+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda-g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0$$

を得る．ただし，ここに

$$\ddot{x}^\mu=\frac{d^2x^\mu}{dt^2}$$

とおいた．次に上式に $g^{\kappa\alpha}$ を乗じて α に関して1から n までの総和を求め，$g^{\kappa\alpha}g_{\alpha\mu}=\delta^\kappa_\mu$ に注意すれば，

$$\ddot{x}^\kappa+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\lambda-\dot{x}^\kappa\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0$$

を得る．この式において $s=t$ とおけば

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

を得る．これが弧の長さ s を媒介変数にとった場合の測地線の微分方程式である．

3 章

絶 対 微 分 学

3.1　クリストッフェルの 3 添字記号

我々は前章の終わりに，リーマン空間における測地線は，微分方程式

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\kappa\omega}\left(\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\omega}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

で与えられることを学んだ．この左辺の第 2 項の係数は普通

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\omega}\left(\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\omega}\right)$$

と書かれ，**クリストッフェルの 3 添字記号**と呼ばれている．$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ が

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}=\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\},$$

すなわち μ と λ に関して対称という性質をもっていることは明らかであるが，これはテンソルの成分になってはいないのである．いま，その座標の変換

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

に対する変換法則を求めてみよう．

まず $g_{\lambda\omega}$ の変換式

$$g_{\lambda'\omega'}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}g_{\lambda\omega}$$

を $x^{\mu'}$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial g_{\lambda'\omega'}}{\partial x^{\mu'}}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}+\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\omega'}}g_{\lambda\alpha},$$

同様に $g_{\mu'\omega'}$ および $g_{\mu'\lambda'}$ をそれぞれ $x^{\lambda'}$ および $x^{\omega'}$ で偏微分して

$$\frac{\partial g_{\mu'\omega'}}{\partial x^{\lambda'}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\omega'}}g_{\mu\alpha},$$

$$\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\omega'}}=\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\omega}}+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\omega'}\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}g_{\alpha\lambda}+\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\omega'}\partial x^{\lambda'}}g_{\mu\alpha}.$$

したがって

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda'\omega'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial g_{\mu'\omega'}}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\omega'}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}\left(\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\omega}}\right)$$
$$+\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\omega'}}g_{\alpha\omega}$$

を得る．この式の両辺に

$$g^{\kappa'\omega'}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\omega'}}{\partial x^{\delta}}g^{\mu\delta}$$

を掛けて，ω' に関して $1'$ から n' までの総和を求めれば

$$\left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

を得る．これがクリストッフェルの3添字記号の変換式であるが，一般には $\dfrac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\neq 0$ であるから $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ は一般にはテンソルの成分ではない．上の変換式はまた

$$\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}}\left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}$$

とも書かれる．この形式は後に非常にしばしば用いられる．

さて，次にこのクリストッフェルの3添字記号 $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の満足する重要な恒等式が2つ3つあるからこれを求めておこう．まず定義の式

$$\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\alpha\varepsilon}\left(\frac{\partial g_{\mu\varepsilon}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\varepsilon}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\varepsilon}}\right)$$

から

$$\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right),$$

同様に

$$\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right).$$

したがって，これらを辺々相加えて

$$\left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} g_{\alpha\lambda} + \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$$

を得る．

次に恒等式

$$g^{\lambda\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^\lambda_\beta$$

を変数 x^ν で偏微分すれば

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} = 0.$$

この式の第2項に上の恒等式から得られる

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} = g_{\varepsilon\beta}\left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + g_{\alpha\varepsilon}\left\{ {\varepsilon \atop \nu\beta} \right\}$$

を代入すれば

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha}\left(g_{\varepsilon\beta}\left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + g_{\alpha\varepsilon}\left\{ {\varepsilon \atop \nu\beta} \right\}\right) = 0,$$

したがって

$$\frac{\partial g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} + g^{\lambda\alpha} g_{\varepsilon\beta}\left\{ {\varepsilon \atop \nu\alpha} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \nu\beta} \right\} = 0$$

を得る．この式の両辺に $g^{\beta\kappa}$ を掛けて β について1から n までの総和を求めれば

$$\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} + \left\{ {\lambda \atop \nu\alpha} \right\} g^{\alpha\kappa} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} g^{\lambda\alpha} = 0$$

なる恒等式を得る．

最後に $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ において $\kappa=\lambda$ とおいて1から n までの総和を求めた $\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\}$ を計算しておこう．定義によって

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}.$$

ところが $g^{\lambda\alpha}$ は，$g_{\lambda\alpha}$ で作った行列式 g における，$g_{\alpha\lambda}$ の余因数 $G^{\lambda\alpha}$ を g で割ったものであるから

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2g} G^{\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}$$

を得る．ところが $G^{\lambda\alpha} \dfrac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu}$ は行列式の各行をそれぞれ x^μ で偏微分して作った n 個の行列式の和を表わしているのであるから，これはちょうど行列式 g を x^μ で偏微分したものである．したがって

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\mu}$$

を得る．これもまた有用な恒等式である．

3.2 絶対微分または共変微分

3.2.1 不変量の絶対微分または共変微分　いま，$f(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を1つの不変量の成分とすれば，この関数の値は座標の変換に対して不変，すなわち

$$f'(x') = f(x)$$

である．この式の両辺を座標 $x^{\lambda'}$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

を得る．この式は不変量 f の偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ が1つの共変ベクトルの成分であることを示している．これを不変量 f の絶対微分係数または**共変微分係数**と呼んで

$$\nabla_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

で表わす．もし不変量 f の dx^λ なる方向への微分を考えるのであれば我々は $df = dx^\lambda \nabla_\lambda f$ を得るが，これももちろん不変量である．我々はこの不変量を f の dx^λ なる方向への**共変微分**または**絶対微分**と呼んで

$$\delta f = df$$

と表わす．

3.2.2　共変ベクトルの絶対微分または共変微分　上の事実はもはやベクトルに対してはあてはまらない．たとえば共変ベクトル u_λ の変換式は

$$u_{\lambda'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} u_\lambda$$

であるが，この式を座標 $x^{\mu'}$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} u_\alpha$$

となって，$\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu}$ はテンソルの成分とはならない．いま上式に $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の変換式から得られる

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \left\{{\alpha' \atop \mu'\lambda'}\right\} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}$$

を代入すれば

$$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} u_\alpha \left\{{\alpha' \atop \mu'\lambda'}\right\} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} u_\alpha \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\},$$

すなわち

$$\frac{\partial u_{\lambda'}}{\partial x^{\mu'}} - \left\{{\alpha' \atop \mu'\lambda'}\right\} u_{\alpha'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu} - \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} u_\alpha \right)$$

を得る．この式は

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu} - \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} u_\alpha$$

が1つのテンソルの成分であることを示している．これを我々はベクトル u_λ の**絶対微分係数**または**共変微分係数**と呼んで

$$\nabla_\mu u_\lambda = \frac{\partial u_\lambda}{\partial x^\mu} - \left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} u_\alpha$$

と書く．

この共変微分係数に dx^μ を掛けて縮約したものを dx^μ という方向への**絶対微分**または**共変微分**と呼んで

$$\delta u_\lambda = du_\lambda - \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\alpha} \right\} dx^\mu u_\alpha$$

でこれを表わす．これは u_λ と同じく共変ベクトルである．

3.2.3 反変ベクトルの絶対微分または共変微分 反変ベクトル u^κ に対しても前と同様な絶対微分係数または共変微分係数を定義することができる．

反変ベクトル u^κ の変換式

$$u^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} u^\kappa$$

または

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} u^{\kappa'} = u^\kappa$$

を座標 $x^{\mu'}$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} u^{\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu}.$$

この式に $\left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\}$ の変換式から得られる

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \left\{ {}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} \right\} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\}$$

を代入すれば

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \left\{ {}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} \right\} u^{\lambda'} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\} u^{\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu},$$

すなわち

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \left(\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}} + \left\{ {}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} \right\} u^{\lambda'} \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\} u^\lambda \right)$$

を得る．この式はまた

$$\frac{\partial u^{\kappa'}}{\partial x^{\mu'}} + \left\{ {}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} \right\} u^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\} u^\lambda \right)$$

とも書けるが，これは

$$\frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {}_{\mu\lambda}^{\kappa} \right\} u^\lambda$$

が1つのテンソルの成分であることを示している．これを我々は反変ベクトル u^κ の**絶対微分係数**または**共変微分係数**と呼んで

$$\nabla_\mu u^\kappa = \frac{\partial u^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} u^\lambda$$

で表わす．

この絶対微分係数に dx^μ を掛けて μ で縮約したものを dx^μ という方向への**絶対微分**または**共変微分**と呼んで，これを

$$\delta u^\kappa = du^\kappa + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} dx^\mu u^\lambda$$

で表わす．これは u^κ と同じく反変ベクトルである．

3.2.4　テンソルの絶対微分または共変微分　上述の共変および反変ベクトルの絶対微分係数または共変微分係数という考えはこれをテンソルにまで拡張することができる．3次の混合テンソル $T_{\mu\lambda}{}^\kappa$ を例にとってこれを説明しよう．

座標の変換

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

に対する $T_{\mu\lambda}{}^\kappa$ の変換式は

$$T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\lambda}{}^\kappa$$

であるが，この式はまた

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} T_{\mu\lambda}{}^\kappa$$

とも書かれる．この式を変数 $x^{\nu'}$ で偏微分すれば

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\alpha'}} T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu}$$
$$+ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} T_{\alpha\lambda}{}^\kappa + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}} T_{\mu\alpha}{}^\kappa$$

となる．この式に $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ の変換式から得られる

$$\frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\nu'}\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\right\} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}$$

等を代入すれば

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\right\}T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'} - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'}$$

$$= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\mu'}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^\kappa$$

$$+ \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\lambda'}\right\}T_{\mu\alpha}{}^\kappa - \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^\kappa$$

となるが，この式はまた

$$\frac{\partial T_{\mu'\lambda'}{}^{\kappa'}}{\partial x^{\nu'}} + \left\{{}_{\nu'}{}^{\kappa'}{}_{\alpha'}\right\}T_{\mu'\lambda'}{}^{\alpha'} - \left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\mu'}\right\}T_{\alpha'\lambda'}{}^{\kappa'} - \left\{{}_{\nu'}{}^{\alpha'}{}_{\lambda'}\right\}T_{\mu'\alpha'}{}^{\kappa'}$$

$$= \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left(\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^\alpha - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^\kappa\right)$$

とも書かれる．これは

$$\frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^\alpha - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^\kappa$$

が1つのテンソルであることを示している．我々はこれをテンソル $T_{\mu\lambda}{}^\kappa$ の**絶対微分係数**または**共変微分係数**と呼んで

$$\nabla_\nu T_{\mu\lambda}{}^\kappa = \frac{\partial T_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}T_{\mu\lambda}{}^\alpha - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right\}T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}T_{\mu\alpha}{}^\kappa$$

で表わす．これから一般のテンソルに対する共変微分係数を表わす式は容易に想像がつくことであろう．最も一般な定義の式を下に書いておこう．

$$\nabla_\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s} = \frac{\partial T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}}{\partial x^\mu} + \sum_{i=1}^{r}\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa_i}{}_{\alpha}\right\}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_s}$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda_j}\right\}T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}.$$

この場合 dx^ν なる方向への**共変微分**または**絶対微分**を定義する式は次のようになる．

$$\delta T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}=dT^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}+\sum_{i=1}^{r}\left\{{\kappa_i \atop \mu\alpha}\right\}dx^\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_s}$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\left\{{\alpha \atop \mu\lambda_j}\right\}dx^\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}.$$

3.2.5　$g_{\mu\lambda}$, $g^{\lambda\kappa}$ および δ^κ_μ の絶対微分または共変微分　我々はすでに一般のテンソルの共変微分係数および共変微分を学んだのであるから，その応用としてリーマン空間の基本テンソル $g_{\mu\lambda}$ および $g^{\lambda\kappa}$ の共変微分係数および共変微分を考えよう．まず

$$\nabla_\nu g_{\mu\lambda}=\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}-\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}-\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha},$$

$$\delta g_{\mu\lambda}=\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}-\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}-\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\lambda}\right)dx^\nu$$

であるが，これらの式の右辺は **3.1** 節において証明した恒等式によって 0 となる．したがって我々は次の定理を得る．

基本共変テンソルの共変微分係数および共変微分は 0 である．

次に基本反変テンソル $g^{\lambda\kappa}$ の共変微分係数および共変微分を考えてみよう．

$$\nabla_\nu g^{\lambda\kappa}=\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu}+\left\{{\lambda \atop \nu\alpha}\right\}g^{\alpha\kappa}+\left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}g^{\lambda\alpha},$$

$$\delta g^{\lambda\kappa}=\left(\frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu}+\left\{{\lambda \atop \nu\alpha}\right\}g^{\alpha\kappa}+\left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}g^{\lambda\alpha}\right)dx^\nu.$$

これらの式の右辺もまた **3.1** 節で証明した恒等式によって 0 となる．したがって我々は次の定理を得る．

基本反変テンソルの共変微分係数および共変微分は 0 である．

さて我々は $g_{\mu\lambda}$ および $g^{\lambda\kappa}$ のいずれもがテンソルの成分であることを知っているのであるから，これらを掛け合わせて後 λ に関して縮約を行なって得られる

$$A^\kappa_\mu=g_{\mu\lambda}g^{\lambda\kappa}=\delta^\kappa_\mu$$

もまた1つのテンソルの成分であることは明らかであろう．このテンソルの成分で作った行列はいわゆる単位行列であるから，このテンソルを**単位テンソル**と呼ぶことにする．この単位テンソル A_μ^κ の共変微分係数および共変微分を計算してみよう．

$$\nabla_\nu A_\mu^\kappa = \frac{\partial A_\mu^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} A_\mu^\alpha - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} A_\alpha^\kappa = \left\{ {\kappa \atop \nu\mu} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \nu\mu} \right\} = 0,$$

$$\delta A_\mu^\kappa = 0.$$

したがって次の定理を得る．

単位テンソルの共変微分係数および共変微分は0である．

3.2.6 テンソルの和および積の共変微分係数および共変微分　我々が今まで学んできた共変微分という演算に対しては，普通の微分と全然同じ規則があてはまる．まず2つの3次のテンソルを例にとって，その和の共変微分係数を考えてみよう．定義によって

$$\begin{aligned}
\nabla_\nu (R_{\mu\lambda}{}^\kappa + S_{\mu\lambda}{}^\kappa) &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}(R_{\mu\lambda}{}^\kappa + S_{\mu\lambda}{}^\kappa) + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} (R_{\mu\lambda}{}^\alpha + S_{\mu\lambda}{}^\alpha) \\
&\quad - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} (R_{\alpha\lambda}{}^\kappa + S_{\alpha\lambda}{}^\kappa) - \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} (R_{\mu\alpha}{}^\kappa + S_{\mu\alpha}{}^\kappa) \\
&= \frac{\partial R_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} R_{\mu\lambda}{}^\alpha - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} R_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} R_{\mu\alpha}{}^\kappa \\
&\quad + \frac{\partial S_{\mu\lambda}{}^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} S_{\mu\lambda}{}^\alpha - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} S_{\alpha\lambda}{}^\kappa - \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} S_{\mu\alpha}{}^\kappa \\
&= \nabla_\nu R_{\mu\nu}{}^\kappa + \nabla_\nu S_{\mu\lambda}{}^\kappa.
\end{aligned}$$

すなわち和の共変微分係数は共変微分係数の和に等しい．共変微分に対しても全く同様な定理があてはまる．

$$\delta(R_{\mu\lambda}{}^\kappa + S_{\mu\lambda}{}^\kappa) = \delta R_{\mu\lambda}{}^\kappa + \delta S_{\mu\lambda}{}^\kappa,$$

すなわち和の共変微分は共変微分の和に等しい．

次に2つの2次のテンソル $R_{\nu\mu}$, $S_\lambda{}^\kappa$ を例にとってその積の共変微分係数を考えてみよう．

$$\nabla_\omega(R_{\nu\mu}S_\lambda{}^\kappa)=\frac{\partial(R_{\nu\mu}S_\lambda{}^\kappa)}{\partial x^\omega}+\{{}^{\,\kappa}_{\omega\alpha}\}R_{\nu\mu}S_\lambda{}^\alpha-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\nu}\}R_{\alpha\mu}S_\lambda{}^\kappa$$

$$-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\mu}\}R_{\nu\alpha}S_\lambda{}^\kappa-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\lambda}\}R_{\nu\mu}S_\alpha{}^\kappa$$

$$=\left(\frac{\partial R_{\nu\mu}}{\partial x^\omega}-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\nu}\}R_{\alpha\mu}-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\mu}\}R_{\nu\alpha}\right)S_\lambda{}^\kappa$$

$$+R_{\nu\mu}\left(\frac{\partial S_\lambda{}^\kappa}{\partial x^\omega}+\{{}^{\,\kappa}_{\omega\alpha}\}S_\lambda{}^\alpha-\{{}^{\,\alpha}_{\omega\lambda}\}S_\alpha{}^\kappa\right)$$

$$=(\nabla_\omega R_{\nu\mu})S_\lambda{}^\kappa+R_{\nu\mu}(\nabla_\omega S_\lambda{}^\kappa),$$

すなわち積の共変微分係数に対しても普通の微分係数に対すると全然同じ法則があてはまる．またその共変微分は

$$\delta(R_{\nu\mu}S_\lambda{}^\kappa)=(\delta R_{\nu\mu})S_\lambda{}^\kappa+R_{\nu\mu}(\delta S_\lambda{}^\kappa)$$

となるから，積の共変微分に対しても普通の微分に対すると全く同じ法則があてはまるわけである．

最後に2つのテンソルの内積に対しても上と同じことがいえる．なぜなら

$$\nabla_\omega(R_{\nu\alpha}S_\lambda{}^\alpha)=(\nabla_\omega R_{\nu\alpha})S_\lambda{}^\alpha+R_{\nu\alpha}(\nabla_\omega S_\lambda{}^\alpha)$$

$$\delta(R_{\nu\alpha}S_\lambda{}^\alpha)=(\delta R_{\nu\alpha})S_\lambda{}^\alpha+R_{\nu\alpha}(\delta S_\lambda{}^\alpha)$$

であるからである．

上の説明はこれをそれぞれ特殊な型のテンソルに対して行なったが，その証明法は全く一般なものであるから，これらの定理がいかなる型のテンソルに対しても同様にあてはまることは明らかであろう．

3.3　勾配，回転，発散

本節では普通のベクトル解析によく現われる**スカラーの勾配**，**ベクトルの回転**，**ベクトルの発散**は，我々の絶対微分学においてはどのように書き表わし得るかを考えよう．

まずスカラー f の**勾配**，すなわち**グラディエント・ベクトル** f_λ は前に述

べたように

$$f_\lambda = \nabla_\lambda f = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

で与えられる．このようにして得られた f_λ は1つの共変ベクトルであるが，反変ベクトルを得たい場合には $g^{\lambda\kappa}$ を用いて

$$f^\kappa = f_\lambda g^{\lambda\kappa} = \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\kappa}$$

と指標を上へあげればよい．

次に1つの共変ベクトル v_λ の回転を求めるために v_λ の共変微分係数を求めれば

$$\nabla_\mu v_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} v_\alpha$$

となる．この式において μ と λ を交換して引き算を行なえば $\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} = \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\}$ であるから

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda}$$

を得る．これが共変ベクトル v_λ の回転と呼ばれているものである．特に v_λ が勾配ベクトルである場合，すなわち

$$v_\lambda = \frac{\partial v}{\partial x^\lambda}$$

というスカラーの存在する場合には

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial^2 v}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = 0,$$

すなわちその回転は0である．また回転が0，すなわち

$$\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\lambda v_\mu = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} = 0$$

であれば，微積分学でよく知られているように，局所的には

$$v_\lambda = \frac{\partial v}{\partial x^\lambda}$$

という関数 v が存在する．したがって1つの共変ベクトル v_λ が勾配ベクト

ルであるための必要十分条件はその回転が 0 となることである.

次に 1 つの反変ベクトルの発散を求めるためにこれを共変微分すれば

$$\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} v^\lambda.$$

この $\nabla_\mu v^\kappa$ は 1 つの混合テンソルであるから κ と μ について縮約を行なえば, ここに 1 つのスカラーを得るはずである. すなわち

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \left\{ {\mu \atop \mu\lambda} \right\} v^\lambda,$$

ところが本章の 3.1 節の最後に証明した公式によって

$$\left\{ {\mu \atop \mu\lambda} \right\} = \left\{ {\mu \atop \lambda\mu} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\lambda}$$

であるから

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^\mu} v^\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, v^\mu)}{\partial x^\mu}$$

を得る. これがベクトル v^κ の発散を与える公式である.

なお 1 つのスカラー f の勾配ベクトルの長さの平方

$$g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

を普通 $\Delta_1 f$ で表わして, **ベルトラミの第 1 種微分径数**と呼び, 勾配ベクトル $\dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ の反変成分 $g^{\mu\lambda} \dfrac{\partial f}{\partial x^\lambda}$ の発散

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g}\, g^{\mu\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right)$$

を $\Delta_2 f$ で表わして, **ベルトラミの第 2 種微分径数**, またはラプラシアンと呼んでいる.

3.4 リーマン・クリストッフェルのテンソル，リッチのテンソル，および曲率スカラー

我々は本章の 2.6 節において，テンソルの和および積に対しては，共変微分は普通の微分と全く同じ規則に従うことを学んだ．しかしながら共変微分を二度続けて行なう場合には，普通の偏微分のようにその順序をとりかえることはできない．1 つの反変ベクトル v^κ を例にとって，その順序を交換した場合の差を求めてみよう．まず

$$\nabla_\mu v^\kappa = \frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} v^\lambda.$$

これは 1 つの 2 次の混合テンソルなのであるから，このテンソルを更に共変微分すれば

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa &= \frac{\nabla_\mu v^\kappa}{\partial x^\nu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} \nabla_\mu v^\alpha - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} \nabla_\alpha v^\kappa \\ &= \frac{\partial^2 v^\kappa}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} v^\lambda + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} \frac{\partial v^\lambda}{\partial x^\nu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} + \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} v^\lambda \right) - \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} \nabla_\alpha v^\kappa,\end{aligned}$$

したがって ν と μ を交換して辺々相減すれば

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = \left(\frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} \right) v^\lambda$$

を得る．したがって

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\}$$

とおけば

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda$$

を得る．ところが $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ は一般には恒等的に 0 とならないから

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa \neq \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa$$

である．すなわち**共変微分**はその順序に関係する．

さて公式

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v^\kappa - \nabla_\mu \nabla_\nu v^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v^\lambda$$

において，その左辺は2つのテンソルの差であるから，これもまた明らかに1つのテンソルである．また v^κ は任意の反変ベクトルである．したがって1章の1.14節において証明した定理によって $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ が1つのテンソルの成分であることを結論することができる．これを**リーマン・クリストッフェルのテンソル**またはリーマン空間の**曲率テンソル**と呼ぶ．

さて上と全く同様な計算を1つの共変ベクトル v_λ に対して行なえば，これに対応する公式として

$$\nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = - K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa v_\kappa$$

を得る．これらの公式はこれを一般のテンソルに対してまで拡張することができる．たとえば3次の混合テンソル $T_{\mu\lambda}{}^\kappa$ を例にとってこの公式を書き下ろしてみれば

$$\nabla_\omega \nabla_\nu T_{\mu\lambda}{}^\kappa - \nabla_\nu \nabla_\omega T_{\mu\lambda}{}^\kappa = K_{\omega\nu\alpha}{}^\kappa T_{\mu\lambda}{}^\alpha - K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha T_{\alpha\lambda}{}^\kappa - K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha T_{\mu\alpha}{}^\kappa$$

である．さらに一般なテンソル $T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s}$ に対しては

$$\nabla_\nu \nabla_\mu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s} - \nabla_\mu \nabla_\nu T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_s} = \sum_{i=1}^{r} K_{\nu\mu\alpha}{}^{\kappa_i} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\alpha\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\cdots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} K_{\nu\mu\lambda_j}{}^{\alpha} T^{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\cdots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\cdots\alpha\cdots\lambda_s}$$

となる．これらの公式は**リッチの公式**と呼ばれている．

さて我々は $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa$ が1つのテンソルであることを知っているのであるから，ここにおいて κ と ν に関して縮約を行なって得られる

$$K_{\mu\lambda} = K_{\nu\mu\lambda}{}^\nu$$

もまたテンソルであることは明らかである．これを**リッチのテンソル**と呼ぶ．さらにまた $K_{\mu\lambda}$ に $g^{\mu\lambda}$ を掛けて μ と λ に対して縮約を行なえばスカラー

$$K = g^{\mu\lambda} K_{\mu\lambda}$$

が得られる．これを**曲率スカラー**と呼ぶ．

3.5 リーマン・クリストッフェルのテンソルおよびリッチのテンソルの性質

まずリーマン・クリストッフェルのテンソル

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\right\}}{\partial x^{\mu}}+\left\{{}_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}\left\{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}-\left\{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\alpha}\right\}\left\{{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\right\}$$

から始めよう．この式から直ちにわかることは，$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ が ν と μ に関して交代，すなわち

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=-K_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}$$

という事実と

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+K_{\mu\lambda\nu}{}^{\kappa}+K_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa}=0$$

とであろう．後者をビアンキの第1恒等式という．

次に基本共変テンソル $g_{\lambda\kappa}$ に対してリッチの公式を適用すれば

$$\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}g_{\lambda\kappa}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}g_{\lambda\kappa}=-K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}g_{\alpha\kappa}-K_{\nu\mu\kappa}{}^{\alpha}g_{\lambda\alpha}.$$

ところが，この式の左辺は恒等的に 0 なのであるから，いま

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}g_{\alpha\kappa}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}$$

とおけば，上式から

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=-K_{\nu\mu\kappa\lambda}$$

を得る．すなわち $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ は λ と κ に関して交代である．このようにして定義された共変テンソル $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ を**共変曲率テンソル**と呼ぶ．また $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ を**第1種のリーマンの記号**と呼び，$K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ を**第2種のリーマンの記号**と呼ぶ人もある．

この $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ が ν と μ に対して交代，すなわち

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=-K_{\mu\nu\lambda\kappa}$$

であることは定義から明らかであろう．また

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}+K_{\mu\lambda\nu}{}^{\alpha}+K_{\lambda\nu\mu}{}^{\alpha}=0$$

に $g_{\alpha\kappa}$ を掛けて α で縮約を行なえば

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}+K_{\mu\lambda\nu\kappa}+K_{\lambda\nu\mu\kappa}=0$$

を得る.

次に $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ を実際に計算してみよう.

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\left(\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}}{\partial x^{\mu}}+\{{}^{\alpha}_{\nu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\mu\lambda}\}-\{{}^{\alpha}_{\mu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\nu\lambda}\}\right)g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\frac{\partial g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}$$

$$+\{{}^{\alpha}_{\nu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}-\{{}^{\alpha}_{\mu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}(\{{}^{\beta}_{\nu\alpha}\}g_{\beta\kappa}+\{{}^{\beta}_{\nu\kappa}\}g_{\alpha\beta})$$

$$+\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}(\{{}^{\beta}_{\mu\alpha}\}g_{\beta\kappa}+\{{}^{\beta}_{\mu\kappa}\}g_{\alpha\beta})$$

$$+\{{}^{\alpha}_{\nu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}-\{{}^{\alpha}_{\mu\beta}\}\{{}^{\beta}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}$$

$$=\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}}{\partial x^{\mu}}-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}\{{}^{\beta}_{\nu\kappa}\}g_{\alpha\beta}+\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\{{}^{\beta}_{\mu\kappa}\}g_{\alpha\beta}.$$

この式に

$$\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\right),$$

$$\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}g_{\alpha\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}}\right)$$

を代入すれば

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}\right)$$

$$-\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}\{{}^{\beta}_{\nu\kappa}\}g_{\alpha\beta}+\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}\{{}^{\beta}_{\mu\kappa}\}g_{\alpha\beta}$$

を得る. この式から容易に

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=K_{\lambda\kappa\nu\mu}$$

であることがわかる.

結局我々が今までに証明した $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ および $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ の性質は次の通りである.

$$\begin{cases} K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = -K_{\mu\nu\lambda}{}^{\kappa}, \\ K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} + K_{\mu\lambda\nu}{}^{\kappa} + K_{\lambda\nu\mu}{}^{\kappa} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K_{\mu\nu\lambda\kappa}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -K_{\nu\mu\kappa\lambda}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} = \quad K_{\lambda\kappa\nu\mu}, \\ K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} + K_{\lambda\nu\mu\kappa} = 0. \end{cases}$$

次にリッチのテンソル $R_{\mu\lambda}$ に移ろう．

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} + K_{\lambda\nu\mu\kappa} = 0$$

を書き直して

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} + K_{\mu\lambda\nu\kappa} - K_{\nu\lambda\mu\kappa} = 0.$$

この式に $g^{\nu\kappa}$ を掛けて ν と κ に関して縮約を行ない，かつ

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}g^{\nu\kappa} = K_{\mu\lambda}, \qquad K_{\mu\lambda\nu\kappa}g^{\nu\kappa} = 0$$

に注意すれば，我々は

$$K_{\mu\lambda} - K_{\lambda\mu} = 0$$

を得る．すなわちリッチのテンソル $K_{\mu\lambda}$ はその共変指標に対して対称である．

3.6 ビアンキの恒等式

1つの共変ベクトル v_λ の共変微分 $\nabla_\mu v_\lambda$ にリッチの公式を適用すれば

$$(a) \qquad \nabla_\omega\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\nu\nabla_\omega\nabla_\mu v_\lambda = -K_{\omega\nu\mu}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\omega\nu\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\mu v_\alpha,$$

ここで指標 ω, ν, μ を適当に入れかえると

$$(b) \qquad \nabla_\nu\nabla_\mu\nabla_\omega v_\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\omega v_\lambda = -K_{\nu\mu\omega}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\omega v_\alpha,$$

$$(c) \qquad \nabla_\mu\nabla_\omega\nabla_\nu v_\lambda - \nabla_\omega\nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = -K_{\mu\omega\nu}{}^{\alpha}\nabla_\alpha v_\lambda - K_{\mu\omega\lambda}{}^{\alpha}\nabla_\nu v_\alpha.$$

次にリッチの公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda - \nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = -K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}v_\alpha,$$

すなわち

$$-\nabla_\nu\nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\mu\nabla_\nu v_\lambda = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\alpha}v_\alpha$$

を x^ω で共変微分すれば

(d)　$$-\nabla_\omega \nabla_\nu \nabla_\mu v_\lambda + \nabla_\omega \nabla_\mu \nabla_\nu v_\lambda = (\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha) v_\alpha + K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha \nabla_\omega v_\alpha,$$

ここで指標 μ, ν, ω を適当に入れかえると

(e)　$$-\nabla_\nu \nabla_\mu \nabla_\omega v_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\omega \nabla_\mu v_\lambda = (\nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha) v_\alpha + K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha \nabla_\nu v_\alpha,$$

(f)　$$-\nabla_\mu \nabla_\omega \nabla_\nu v_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\omega v_\lambda = (\nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha) v_\alpha + K_{\omega\nu\lambda}{}^\alpha \nabla_\mu v_\alpha,$$

を得る．さて，ここに得られた6個の式 (a), (b), (c), (d), (e), (f) を全部加え合わせれば

$$-(K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha + K_{\nu\mu\omega}{}^\alpha + K_{\mu\omega\nu}{}^\alpha) \nabla_\alpha v_\lambda + (\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha + \nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\alpha + \nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda\alpha}) v_\alpha = 0$$

を得る．しかるにこの第1項は $K_{\omega\nu\mu}{}^\alpha$ の性質によって恒等的に0となる．また第2項において v_α は全く任意な共変ベクトルである．したがって上式から

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa + \nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda}{}^\kappa + \nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda}{}^\kappa = 0$$

という恒等式を得る．これはリーマン空間論における重要な恒等式の1つであって，**ビアンキの第2恒等式**と呼ばれている．このビアンキの恒等式において $\kappa = \omega$ とおいて縮約を行なえば

$$\nabla_\alpha K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha - \nabla_\nu K_{\mu\lambda} + \nabla_\mu K_{\nu\lambda} = 0,$$

この式にさらに $g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約を行ない

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\alpha g^{\mu\lambda} = K_\nu{}^\alpha = K_{\nu\mu} g^{\mu\alpha}, \qquad K_{\mu\lambda} g^{\mu\lambda} = K$$

に注意すれば

$$2\nabla_\alpha K_\nu{}^\alpha - \nabla_\nu K = 0$$

を得る．したがって

$$G_\lambda{}^\kappa = K_\lambda{}^\kappa - \frac{1}{2} K \delta_\lambda^\kappa$$

とおけば

$$\nabla_\alpha G_\lambda{}^\alpha = \nabla_\alpha K_\lambda{}^\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\lambda K = 0$$

となるが，これは相対性理論において重要な役割を演ずる1つの公式である．

3.7 リーマンの曲率

いまリーマン空間中の1点 (x^κ) から出る2つの反変ベクトル u^κ および v^κ が与えられていれば，これから

$$k = -\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}$$

というスカラーを作ることができる．このスカラーはちょうど，u^κ と v^κ の張る2次元の平面に接して点 (x^κ) を通るすべての測地線が作る2次元の曲面の点 (x^κ) におけるガウスの曲率になっているのである．このスカラーを我々は2つのベクトル u^κ および v^κ によって定められる方向に対する**リーマンの曲率**と呼ぶ[5章5.13節参照]．

もし，このリーマンの曲率がどの点においてもその方向 u^κ および v^κ に関係しないというなら，我々は上式から

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -k(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})$$

を得る．ここに k は1つのスカラーであるが，これを定めるために上式に $g^{\nu\kappa}g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約を行なえば

$$K = -k(n-n^2),$$

すなわち

$$k = \frac{K}{n(n-1)}$$

を得る．

さらにこのリーマンの曲率が方向 u^κ および v^κ の如何にかかわらずどの点においても0であるというなら

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = 0$$

を得る．このように曲率テンソルの0であるようなリーマン空間を我々は**平たんな空間**と呼ぶ．後に証明するように，平たんなリーマン空間とは実は局所的にはユークリッド空間のことなのである．

3.8 シューアの定理

我々は前節でリーマンの曲率がこれを定義する2つの方向 u^κ および v^κ に無関係であるというなら共変曲率テンソル $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ は

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa} = -k(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})$$

という形をしていなければならないことを述べた．ここに現われて来るスカラー k は一般に座標の関数であってもよいわけである．しかし，上の関係式をビアンキの恒等式

$$\nabla_\omega K_{\nu\mu\lambda\kappa} + \nabla_\nu K_{\mu\omega\lambda\kappa} + \nabla_\mu K_{\omega\nu\lambda\kappa} = 0$$

に代入すれば

$$(\nabla_\omega k)(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) + (\nabla_\nu k)(g_{\mu\lambda}g_{\omega\kappa} - g_{\omega\lambda}g_{\mu\kappa}) + (\nabla_\mu k)(g_{\omega\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda}g_{\omega\kappa}) = 0$$

となる．この式に $g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約を行なえば

$$(n-2)(\nabla_\omega k\, g_{\nu\kappa} - \nabla_\nu k\, g_{\omega\kappa}) = 0.$$

この式にさらに $g^{\omega\kappa}$ を掛けて縮約を行なえば

$$(n-1)(n-2)\nabla_\nu k = 0$$

を得る．したがって $n \geqq 3$ の場合は上式から

$$\nabla_\kappa k = \frac{\partial k}{\partial x^\kappa} = 0$$

を得る．これは k というスカラーが空間の到るところで一定であることを示している．これがいわゆる**シューアの定理**である．すなわち

空間の各点でリーマンの曲率がこれを定義する2方向に無関係であれば，このリーマンの曲率は空間の到るところで定数である．

このような空間を我々は**定曲率空間**と呼ぶ．

3.9 平均曲率，リッチの主方向，アインシュタイン空間

我々のリーマン空間中の1点 (x^κ) において，互いに直交する n 個の単位

ベクトル $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ を考えよう $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$．ここに (α) はベクトルの番号を表わす指標であり，κ はベクトルの反変成分を表わす指標である．したがって括弧内の指標に対しては総和に関する規則を適用しないこととする．さて $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ が互いに直交する n 個の単位ベクトルであるという事実は

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\mu} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

で表わされる．このように，空間の各点で考えられた n 個の互いに直交する単位ベクトルの集りを，我々は**直交 n 重系**と呼ぶ．さて $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ の共変成分を

$$g_{\mu\lambda} h_{(\alpha)}^{\lambda} = h_{(\alpha)\mu}$$

とおけば，上式から

$$h_{(\alpha)\lambda} h_{(\beta)}^{\lambda} = \delta_{\alpha\beta}.$$

これは $h_{(\alpha)\lambda}$ で作った行列と $h_{(\beta)}^{\lambda}$ で作った行列の積が $\delta_{\alpha\beta}$ で作った行列，すなわち**単位行列**に等しいことを示している．したがって上式と同時に

$$\sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)\lambda} h_{(\alpha)}^{\mu} = \delta_{\lambda}^{\mu}$$

も成立しなければならない．この式はまた $g^{\lambda\kappa}$ を掛けて縮約することによって

$$\sum_{\alpha=1}^{n} h_{(\alpha)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\kappa} = g^{\mu\kappa}$$

とも書かれる．

さて，今この n 重系に属する 2 つのベクトル $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ と $h_{(\beta)}^{\kappa}$ によって定められる方向に対するリーマンの曲率を $K_{(\alpha)(\beta)}$ で表わせば

$$K_{(\alpha)(\beta)} = -\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa}}{(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}) h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa}},$$

すなわち

$$K_{(\alpha)(\beta)} = -K_{\nu\mu\lambda\kappa} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\alpha)}^{\lambda} h_{(\beta)}^{\kappa} \qquad (\alpha \neq \beta)$$

を得る．ここにおいて $\beta = 1, 2, \cdots, n$ に対する $K_{(\alpha)(\beta)}$ の総和を求めれば

$$\sum_{\beta=1}^{n} K_{(\alpha)(\beta)} = -K_{\nu\mu\lambda\kappa} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda} \sum_{\beta=1}^{n} h_{(\beta)}^{\mu} h_{(\beta)}^{\kappa}$$

$$= -K_{\nu\mu\lambda\kappa} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda} g^{\mu\kappa}$$

$$= K_{\nu\lambda} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda}$$

を得る．ただし，ここに $K_{(\alpha)(\alpha)}=0$ とした．したがって $\sum_{\beta=1}^{n} K_{(\alpha)(\beta)}$ は $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ と，これに垂直な $n-1$ 個の互いに垂直なベクトルとで定められるリーマンの曲率の和になっている．これを我々は方向 $h_{(\alpha)}^{\kappa}$ に対する**平均曲率**と呼ぶ．次に n 個の互いに垂直な方向に対する平均曲率の総和を求めれば，上式から

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} K_{(\alpha)(\beta)} = \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\nu\lambda} h_{(\alpha)}^{\nu} h_{(\alpha)}^{\lambda}$$

$$= K_{\mu\lambda} g^{\nu\lambda} = K$$

となる．この結果は我々の n 重系の選び方に関係しない．したがってn 個の互いに垂直な方向に対する平均曲率の和は，この n 重系の選び方に無関係で曲率スカラーに等しい，という定理を得る．

いま任意のベクトルをとってこの方向に対する平均曲率を M とすれば

$$M = \frac{K_{\mu\lambda} v^{\mu} v^{\lambda}}{g_{\gamma\beta} v^{\gamma} v^{\beta}}$$

であるが，この M の極値を与えるような方向 v^{κ} を求めてみよう．そのために

$$\frac{\partial M}{\partial v^{\nu}} = 0$$

を計算すれば

$$\frac{2K_{\nu\lambda} v^{\nu} (g_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}) - 2g_{\lambda\beta} v^{\beta} (K_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu})}{(g_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta})^2} = 0,$$

すなわち

$$(K_{\nu\lambda} - M g_{\nu\lambda}) v^{\lambda} = 0$$

となる．

これを満足する方向は一般に n 個あって互いに直交しているが，これを**リッチの主方向**と呼ぶ．またリッチの主方向が不定になるような空間，すな

わち

$$K_{\mu\lambda}=Mg_{\mu\lambda}$$

である空間を我々は**アインシュタイン空間**と呼ぶ．上式に $g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約を行なえば，

$$g^{\mu\lambda}K_{\mu\lambda}=nM, \qquad \therefore \quad M=\frac{1}{n}K.$$

したがってアインシュタイン空間を定義する式は

$$K_{\mu\lambda}=\frac{1}{n}Kg_{\mu\lambda}$$

と書かれる．これは相対論において利用される空間である．

3.10　$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ である空間

我々は前に $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ である空間を平たんな空間と呼んだ．本節では平たんな空間とは実は局所的にユークリッド空間であることを証明しよう．

その前にまずユークリッド空間というものが1つのリーマン空間であるには違いないが，どのようなリーマン空間であるかを考えてみなければならない．ユークリッド空間中に1つの直交軸 $(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^n)$ をとれば，その微小距離 ds の自乗は座標の微分の自乗の和

$$ds^2=dx^1dx^1+dx^2dx^2+\cdots\cdots+dx^ndx^n$$

で与えられる．また斜交軸 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ をとれば定数を係数とする微分2次形式

$$ds^2=g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

で与えられる．また定数を係数とする正値2次微分形式は適当な1次変換によってこれを微分の自乗の和に直し得ることもよく知られている．したがって

ユークリッド空間とは，適当な座標の変換を行なえば，その基本テンソルの成分を全部定数ならしめ得るようなリーマン空間である

ということができる．

さて我々はこれから1つのリーマン空間が局所的に実はユークリッド空間になるために必要にして十分な条件は $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ であることを証明しようというのであるが，この条件の必要であることは明らかであろう．なぜならユークリッド空間中に1つの斜交軸をとれば，すべての $g_{\mu\lambda}$ は定数となり，したがって $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ は全部0となる．したがって $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ のすべての成分も0となって $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ を得る．ところが，これはテンソル方程式であるからどんな座標系に対しても成立する．

したがって，あるリーマン空間が局所的に実はユークリッド空間であるというなら，どんな座標系に対しても $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ でなければならない．したがって $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ はリーマン空間が局所的に実はユークリッド空間になるための必要条件である．次にこれが十分条件であることを示そう．

それには $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ という条件があるとき，適当な座標の変換

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

を行なって，$g_{\mu'\lambda'}$ を全部定数となし得ることを示せばよい．ところが

$$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}=\frac{1}{2}g^{\kappa'\alpha'}\left(\frac{\partial g_{\lambda'\alpha'}}{\partial x^{\mu'}}+\frac{\partial g_{\mu'\alpha'}}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\alpha'}}\right),$$

$$\frac{\partial g_{\mu'\lambda'}}{\partial x^{\nu'}}=\{{}^{\alpha'}_{\nu'\mu'}\}g_{\alpha'\lambda'}+\{{}^{\alpha'}_{\nu'\lambda'}\}g_{\mu'\alpha'}$$

であるから，$g_{\mu'\lambda'}$ を全部定数となし得ることを示すためには，$\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}$ を全部0にし得ることを証明すればよい．したがって $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ の変換式

$$\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}=\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}$$

からわかるように

$$\frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$$

を満足する $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ の関数 $x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\cdots,x^n)$ の存在することを示せばよい．すなわち $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ という条件があれば，上の偏微分方程式が完

全積分可能であることを示せばよい.

さて，上の偏微分方程式を x^ν で偏微分すれば

$$\frac{\partial^3 x^{\kappa'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\lambda} = \frac{\partial^\lambda x^{\kappa'}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}\left\{{}^{\,\alpha}_{\mu\lambda}\right\} + \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}$$

この式の右辺にもとの偏微分方程式から得られる値を代入すれば

$$\frac{\partial^3 x^{\kappa'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu \partial x^\lambda} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\left\{{}^{\,\kappa}_{\nu\alpha}\right\}\left\{{}^{\,\alpha}_{\mu\lambda}\right\} + \frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\right)$$

を得る．したがって与えられた偏微分方程式の完全積分条件は，この式の右辺が ν と μ に関して，したがって右辺の括弧のなかが ν と μ に関して対称であるということである．ところが

$$\begin{aligned}
&\left\{{}^{\,\kappa}_{\nu\alpha}\right\}\left\{{}^{\,\alpha}_{\mu\lambda}\right\} + \frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\,\alpha}_{\nu\lambda}\right\} - \frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\left\{{}^{\,\kappa}_{\nu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu} + \left\{{}^{\,\kappa}_{\nu\alpha}\right\}\left\{{}^{\,\alpha}_{\mu\lambda}\right\} - \left\{{}^{\,\kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\,\alpha}_{\nu\lambda}\right\} \\
&= K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = 0
\end{aligned}$$

であるから，この偏微分方程式は完全積分可能であることがわかって，我々の定理は証明されたわけである．すなわち

リーマン空間が局所的に実はユークリッド空間になるための必要十分条件は $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = 0$ である.

3.11 ベクトルの平行移動

ユークリッド空間においては，1つの斜交軸をとれば，1点 (x^κ) におけるベクトル v^λ をこれに近い点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ まで平行に移動するという事実は，v^λ の成分が変わらない，すなわち

$$dv^\kappa = 0$$

という式で表わされる．しかしながらリーマン空間においては，ベクトルの平行移動を上の式で定義するわけにはいかない．なぜなら v^κ がベクトルの

成分であるとき，dv^κ は必ずしもベクトルの成分であるとは限らない．したがって上の方程式はテンソル（ベクトル）方程式とはならず，座標の取り方に無関係な幾何学的意味をもち得ないからである．

そこでこの不便をのぞくために普通の微分 dv^κ の代わりに共変微分 δv^κ を採用して

$$\delta v^\kappa = dv^\kappa + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} dx^\mu v^\lambda = 0$$

であるときに，ベクトル v^κ は点 (x^κ) から点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ へ平行に移動されたと定義することにする．これが有名な**レビ・チビタの平行性**である．その幾何学意味は後で述べる機会があると思う．

次にベクトル v^κ が点 (x^κ) から点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ へ平行に移動されたとして，その長さ $(v)^2 = g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda$ の変化を調べてみよう．

$$\begin{aligned} d(v)^2 &= d(g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda) \\ &= (dg_{\mu\lambda}) v^\mu v^\lambda + g_{\mu\lambda} (dv^\mu) v^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu (dv^\lambda) \\ &= (dg_{\mu\lambda}) v^\mu v^\lambda - g_{\alpha\lambda} \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} dx^\nu v^\mu v^\lambda - g_{\mu\alpha} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} dx^\nu v^\mu v^\lambda \\ &= \left(dg_{\mu\lambda} - g_{\alpha\lambda} \left\{ {\alpha \atop \nu\mu} \right\} dx^\nu - g_{\mu\alpha} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} dx^\nu\right) v^\mu v^\nu \\ &= 0. \end{aligned}$$

または $d(v)^2 = \delta(v)^2$ に注意すれば

$$\begin{aligned} d(v)^2 &= \delta(v)^2 = \delta(g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda) \\ &= (\delta g_{\mu\lambda}) v^\mu v^\lambda + g_{\mu\lambda} (\delta v^\mu) v^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu (\delta v^\lambda) \\ &= 0. \end{aligned}$$

いずれにしても v の値は変わらないのであるから

<u>平行移動によってベクトルはその長さを変えない</u>

という定理を得る．

次に 2 つのベクトル u^κ と v^κ がともに点 (x^κ) から点 $(x^\lambda + dx^\kappa)$ へ平行に移動されたとしてそのなす角

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\lambda}v^\mu v^\lambda}{uv}$$

の変化を考えよう．ここに u, v はそれぞれ u^κ, v^κ の長さを表わしている．しかるに u, v は平行移動によってその値をかえないのであるから

$$d\cos\theta = \delta\cos\theta = \frac{1}{uv}\left[(\delta g_{\mu\lambda})u^\mu v^\lambda + g_{\mu\lambda}(\delta u^\mu)v^\lambda + g_{\mu\lambda}u^\mu(\delta v^\lambda)\right]$$
$$= 0$$

したがって

2つのベクトルがともに平行に移動するならば，そのなす角は不変であるという定理を得る．

上の平行移動の定義は点 (x^κ) がこれと無限に近い点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ へ移る場合にのみ適用できる定義である．有限の距離だけ離れた点 $(x^\kappa)_0$ から $(x^\kappa)_1$ まで，ベクトルを平行に移動していくには，$(x^\kappa)_0$ と $(x^\kappa)_1$ を結ぶ曲線を指定しなければならない．いま

$$x^\kappa(t_0) = (x^\kappa)_0, \qquad x^\kappa(t_1) = (x^\kappa)_1$$

を満足する1つの曲線 $x^\kappa(t)$ に沿って，ベクトル v^κ を平行に移動するという場合には，$t = t_0$ における v^κ の値を与えて微分方程式

$$\frac{dv^\lambda}{dt} + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}v^\lambda = 0$$

を解かなければならない．その解 $v^\kappa(t)$ はこの曲線 $x^\kappa(t)$ に沿ってつねに平行に移動して行くところのベクトルの成分を表わしているのであるから，点$(x^\kappa)_0$ におけるベクトル $v^\kappa(t_0)$ を曲線 $x^\kappa(t)$ に沿って点 $(x^\kappa)_1$ まで平行に移動して得られるベクトルは $v^\kappa(t_1)$ である．このようにベクトルの平行移動は2点を結ぶ曲線に関係するのであるから，2点を結ぶ曲線を変えれば，その結果もまた変わることは明らかである．

さて，我々はリーマン空間の測地線が微分方程式

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

で与えられることを2章の**2.6**節で学んだ．ところが $\dfrac{dx^\kappa}{ds}$ はこの測地線への接線を表わす単位ベクトルであって，上の微分方程式は

$$\frac{d}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

と考えれば，この接線ベクトル $\dfrac{dx^\kappa}{ds}$ が，この曲線に沿ってつねに平行に移動することを示している．したがって

測地線の接線は測地線に沿ってつねに平行に移動する

という定理を得る．したがって，もしこの測地線に沿って平行に移動する他のベクトル v^κ があれば，前の定理によって

測地線に沿って平行に移動するベクトルと測地線の接線とのなす角は一定である

という定理を得る．

この定理から2次元のリーマン空間におけるレビ・チビタの平行性の次のような幾何学的解釈を得る．すなわち3次元のユークリッド空間中の2次元の曲面は，前にも述べたように1つの2次元のリーマン空間と考え得るのであるが，このなかの，すなわちこの曲面に接するごく近い2点における2つのベクトルがレビ・チビタの意味で平行であるということは，このごく近い2点を結ぶ測地線に対して，2つのベクトルのなす角が相等しいということと幾何学的には同じである．

ベクトル $v^\kappa(x)$ を1点から他の点へ移動する平行移動は，この2点を結ぶ曲線に関係するのであるが，もしこの2点を結ぶ曲線のいかんにかかわらず同一の結果が得られるというのであれば $v^\kappa(x)$ はどんな条件を満足していなければならないかを調べてみよう．

それには

$$\frac{dv^\kappa}{dt}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}v^\lambda=\left(\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}v^\lambda\right)\frac{dx^\mu}{dt}=0$$

が $\dfrac{dx^\mu}{dt}$ のいかんにかかわらず成立しなければならない．したがって上式から

$$\nabla_\mu v^\kappa=\frac{\partial v^\kappa}{\partial x^\mu}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}v^\lambda=0.$$

を得る．これがベクトル v^κ の平行性が路に関係しないための条件である．

次にどんなベクトルの平行性も路に関係しないような場合を考えてみよう．この場合には $\nabla_\mu v^\kappa=0$ から

$$\nabla_\nu\nabla_\mu v^\kappa-\nabla_\mu\nabla_\nu v^\kappa=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}v^\lambda=0$$

ところが v^κ は全く任意なベクトルなのであるから，上式から

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$$

を得る．すなわち，このような空間は局所的にユークリッド空間でなければならない．したがって我々は次の定理を得る．

どんなベクトルの平行移動も路に関係しないようなリーマン空間は局所的に実はユークリッド空間である．

3.12　無限に小さな閉曲線に沿ってのベクトルの平行移動

いまリーマン空間内に $(x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa+\underset{2}{d}\underset{1}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa+\underset{2}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa)$ という無限に小さな閉曲線を考えて，これに沿ってのベクトル v^κ の平行移動を考えてみよう．

まず，ベクトル v^κ を点 (x^κ) から点 $(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)$ まで平行に移動すれば

$$\underset{1}{d}v^\kappa+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda=0$$

から

$$\underset{1}{d}v^\kappa=-\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda$$

であるから，$(x^\kappa+\underset{1}{d}x^\kappa)$ において

$$v^\kappa - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda$$

というベクトルを得る．次に点 $(x^\kappa + \underset{1}{d}x^\kappa)$ におけるこのベクトルを点 $(x^\kappa + \underset{1}{d}x^\kappa + \underset{2}{d}x^\kappa + \underset{2}{d}\underset{1}{d}x^\kappa)$ まで平行に移動すれば

$$\underset{2}{d}\left(v^\kappa - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda\right) + \left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} + \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\underset{1}{d}x^\nu\right)\underset{2}{d}x^\mu\left(v^\lambda - \left\{{\lambda \atop \alpha\beta}\right\}\underset{1}{d}x^\alpha v^\beta\right) = 0$$

から

$$\begin{aligned}\underset{2}{d}\left(v^\kappa - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda\right) = &-\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda \\ &+ \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda\end{aligned}$$

であるから，$(x^\lambda + \underset{1}{d}x^\lambda + \underset{2}{d}x^\lambda + \underset{2}{d}\underset{1}{d}x^\lambda)$ において

$$v^\kappa - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda + \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda$$

というベクトルを得る．同様に $(x^\kappa)\to(x^\kappa + \underset{2}{d}x^\kappa)\to(x^\kappa + \underset{2}{d}x^\kappa + \underset{1}{d}x^\kappa + \underset{1}{d}\underset{2}{d}x^\kappa)$ という路を通って同じ点までベクトル v^κ を平行に移動していけば，点 $(x^\kappa + \underset{2}{d}x^\kappa + \underset{1}{d}x^\kappa + \underset{1}{d}\underset{2}{d}x^\kappa) = (x^\kappa + \underset{1}{d}x^\kappa + \underset{2}{d}x^\kappa + \underset{2}{d}\underset{1}{d}x^\kappa)$ において

$$v^\kappa - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda - \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\mu v^\lambda - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda$$

を得る．したがってこれらは必ずしも一致しないが，その差を求めてみれば

$$\left(\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^\mu} + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\} - \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}\right)\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\mu v^\lambda$$

となる．したがってこの差がつねに 0 なら，$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$ となる．これは $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$ の 1 つの幾何学的意味を与える．

4 章
曲　線　論

4.1 測地線の方程式の級数展開

我々は2章の4.6節において，リーマン空間においては長さ s の極値を与える曲線，すなわち測地線は微分方程式

$$\frac{d^2x^\kappa}{ds}+\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

で与えられることを学んだ．この微分方程式は n 個の未知数を含んだ2次の連立微分方程式である．したがって，その一般解は $2n-1$ 個の任意定数を含み得るわけである．ゆえにリーマン空間中に1つの点の座標と，この点を通る1つの単位ベクトルの成分とを与えれば，この微分方程式の解は1つあり，そしてただ1つ定まる．したがって，リーマン空間中に1点とこの点を通る1つのベクトルとが与えられれば，この点を通り，このベクトルに接するような測地線は1つあってただ1つに限る．またリーマン空間中の2つの近い点の座標が与えられても，上の微分方程式の解は1つあり，そしてただ1つ定まる．したがってリーマン空間の適当な近傍に2点が与えられれば，これらの点を通る測地線は1つあってただ1つに限る．

本節ではリーマン空間内に1点 x_0^κ と，この点を通る1つの単位ベクトル

$$\xi^\kappa=\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0$$

とが与えられたとして，上記の微分方程式の解，すなわち測地線の方程式の

級数展開を求めてみよう．ただし，ここに（　）$_0$ は1点 x_0^κ における括弧内の関数の値を示すものとする．

まず曲線の方程式 $x^\kappa(s)$ を，1点 x_0^κ から測った曲線の長さ s のべき級数に展開すれば

$$x^\kappa(s) = x_0^\kappa + \left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0 s + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}\right)_0 s^3 + \cdots\cdots$$

となる．ここに s の係数は与えられた

$$\left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0 = \xi^\kappa$$

に等しい．また s^2 の係数はもとの微分方程式から

$$\left(\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}\right)_0 = -\left(\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}\right)_0$$

$$= -\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}_0 \xi^\mu \xi^\lambda$$

に等しい．さらに s^3 の係数を求めるために，与えられた微分方程式をさらに s で微分すれば

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3} + \frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}\frac{dx^\lambda}{ds} + \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = 0.$$

この式の $\dfrac{d^2x^\kappa}{ds^2}$ などのところへ，最初の微分方程式から得られる値を代入すれば

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3} + \frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} - \left\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\right\}\left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}$$

$$- \left\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\right\}\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0,$$

すなわち

$$\frac{d^3x^\kappa}{ds^3} = -\left(\frac{\partial\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}}{\partial x^\nu} - \left\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\right\}\left\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\right\} - \left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}\left\{{}^{\kappa}_{\alpha\mu}\right\}\right)\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds},$$

したがって

$$\left(\frac{d^3x^\kappa}{ds^3}\right)_0 = -\left[\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}_0\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda$$

となる．したがって測地線の方程式の s^3 までの級数展開は

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \xi^\kappa s - \frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0\xi^\mu\xi^\lambda s^2$$
$$-\frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}{\partial x^\nu}\right)_0 - 2\{{}^{\alpha}_{\nu\mu}\}_0\{{}^{\kappa}_{\alpha\lambda}\}_0\right]\xi^\nu\xi^\mu\xi^\lambda s^3 - \cdots\cdots$$

となる．

4.2 測 地 座 標

ユークリッド空間において1つの斜交座標軸またはもっと一般に1つの直線座標軸をとれば，これらの座標軸に対する基本テンソル $g_{\mu\lambda}$ の成分は，空間の至るところで全部定数となる．このように基本テンソル $g_{\mu\lambda}$ の成分を全部定数ならしめ得るような，したがって $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ の値を全部0ならしめ得るような座標系の存在するリーマン空間は，$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ なる空間，すなわち局所ユークリッド空間に限る，ということを我々はすでに本章の **4.1** 節で学んだ．したがって一般のリーマン空間においては，空間のすべての点で基本テンソル $g_{\mu\lambda}$ を定数ならしめ得るような，したがって $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ の値を全部0ならしめ得るような座標系は必ずしも存在しないわけである．

しかしながらリーマン空間中に指定された1点 x_0^κ においてなら，この点で全部の $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ を0ならしめるような座標系の存在することを証明することができる．たとえば1点 x_0^κ における関数の値は全部これを $(\quad)_0$ で表わすこととして，座標の変換

$$\bar{x}^\kappa = (x^\kappa - x_0^\kappa) + \frac{1}{2}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0(x^\mu - x_0^\mu)(x^\lambda - x_0^\lambda)$$

を考えてみよう．この座標変換によってクリストッフェルの記号 $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ は $\overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}$ に変換されるが，その変換法則は

$$\frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\alpha}\overline{\left\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\beta}\right\}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\gamma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\beta}\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\beta},$$

または x^κ と $\bar{x}^\kappa$ をとりかえて

$$\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\left\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\beta}\right\} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}$$

で与えられる．したがって点 x_0^κ においては

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0\left\{{}^{\ \alpha}_{\gamma\beta}\right\}_0 = \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\right)_0\left(\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\beta}\right)_0\overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}}_0 + \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\right)_0$$

となるわけである．ところが変換の方程式から直ちに得られるように

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\alpha}\right)_0 = \delta_\alpha^\kappa, \qquad \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^\kappa}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\right)_0 = \left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}_0$$

であるから，上の変換式は

$$\delta_\alpha^\kappa\left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}_0 = \delta_\gamma^\mu\,\delta_\beta^\lambda\,\overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}}_0 + \left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}_0,$$

したがって

$$\left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}_0 = \overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}}_0 + \left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}_0,$$

すなわち

$$\overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}}_0 = 0$$

を与える．したがって座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ においては，1点 x_0^κ, すなわち $\bar{x}_0^\kappa = 0$ における $\overline{\left\{{}^{\ \kappa}_{\gamma\beta}\right\}}$ の値は全部0となる．このような座標系のことを我々は1点 $\bar{x}_0^\kappa$ を**極**とする**測地座標**と呼ぶ．測地座標の極においてはクリストッフェルの3添字記号の値が全部0となるのであるから，極における共変微分は普通の微分と一致する．

上述の結果をさらに拡張して，リーマン空間中の任意の曲線の上のすべての点において測地的な，すなわち曲線上のすべての点において $\left\{{}^{\ \kappa}_{\mu\lambda}\right\}$ の値が0となるような座標系の存在することを証明することもできる．これは**フェルミの定理**と呼ばれている．

4.3 標準座標

我々は本章の4.1節において，1点 x_0^κ を通る測地線の方程式を，級数に展開すれば

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \xi^\kappa s - \frac{1}{2!}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}_0 \xi^\mu \xi^\lambda s^2 - \cdots\cdots$$

となることをみた．ここにおいていま

$$\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$$

とおけば，上の級数展開から

$$x^\kappa = x_0^\kappa + \bar{x}^\kappa - \frac{1}{2!}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}_0 \bar{x}^\mu \bar{x}^\lambda - \cdots\cdots$$

を得る．この方程式は最早 ξ^κ を含んでいないから，これは座標系 (x^κ) を座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ に変換する変換の方程式とみなすことができる．しかもその関数行列式 $\left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$ の値は点 x_0^κ においては1であるから，この点の付近では上の方程式を $\bar{x}$ について解くことができる．その結果は

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa - x_0^\kappa + \Gamma^\kappa(x^1 - x_0^1, \cdots\cdots, x^n - x_0^n)$$

という形をしているはずである．ただしここに Γ^κ は $x^\kappa - x_0^\kappa$ の2次の項から始まるべき級数である．

さて，点 x_0^κ においては $\left(\dfrac{\partial \bar{x}^\kappa}{\partial x^\mu}\right)_0 = \delta_\mu^\kappa$ であるから点 x_0^κ におけるベクトル ξ^κ は座標系 (x^κ) に対しても座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ に対しても同一の成分 ξ^κ をもっている．したがって

$$\bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s$$

は座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ における測地線の方程式である．測地線の方程式がこのように s の1次式で書かれ得る座標系を，我々は点 $\bar{x}_0^\kappa = 0$ を**原点とする標準座標**と呼ぶ．これはちょうどユークリッド幾何学において直線座標系を用いた場合の原点を通る直線の方程式と同一である．

もちろん標準座標系においても測地線の微分方程式は

$$\frac{d^2\bar{x}^\kappa}{ds^2}+\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}=0$$

という形をしている．ところが $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$ はこの微分方程式の1つの解なのであるから，これを上式に代入すれば

$$\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\xi^\mu\xi^\lambda=0.$$

したがって，この式の両辺に s^2 を掛けて $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$ を再び用いれば

$$\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda=0$$

を得る．この式は標準座標を用いれば空間の到るところの点で成立する式である．逆にこの式が成立していれば，$\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$ という形の式が測地線の微分方程式

$$\frac{d^2\bar{x}^\kappa}{ds^2}+\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\frac{d\bar{x}^\mu}{ds}\frac{d\bar{x}^\lambda}{ds}=0$$

を満足していることは明らかである．したがって

座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ におけるクリストッフェルの3添字記号を $\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}$ で表わせば，座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ が標準座標であるために必要にしてかつ十分な条件は，方程式

$$\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}\bar{x}^\mu\bar{x}^\lambda=0$$

が空間の各点において成立することである，

という定理を得る．

さて，標準座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ の原点 $\bar{x}^\kappa_0=0$ において，この点を通りベクトル ξ^κ に接する測地線の方程式を級数に展開すれば

$$\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s-\frac{1}{2!}\left\{\overline{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}}\right\}_0\xi^\mu\xi^\lambda s^2-\cdots\cdots$$

となる．ところが，この式は実は $\bar{x}^\kappa=\xi^\kappa s$ とならなければいけないのであるから，我々は

$$\left\{\overline{{}^{\lambda}_{\mu\nu}}\right\}_0\xi^\mu\xi^\nu=0$$

を得る．ところがここに ξ^κ の比は全く任意に選び得るものであって，しか

も $\overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}_0$ はμとλに関して対称なのであるから，我々は

$$\overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}_0 = 0$$

を得る．したがって

標準座標は１つの測地座標である

という定理を得る．

さて，標準座標というものは，原点さえきめておけば，普通の座標系 (x^κ) に対してただ１つ定まるものである．したがって普通の座標系 (x^κ) のほうに

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

という変換を行なえば，これに対する標準座標系は $(\bar{x}^\kappa)$ から $(\bar{x}^{\kappa'})$ に変わる．ここに $(\bar{x}^\kappa)$ と $(\bar{x}^{\kappa'})$ との関係を求めてみよう．この場合，同一の原点を通る１つの測地線の方程式は

$$\text{標準座標系}\ (\bar{x}^\kappa)\ \text{においては}\quad \bar{x}^\kappa = \xi^\kappa s,$$

$$\text{標準座標系}\ (\bar{x}^{\kappa'})\ \text{においては}\quad \bar{x}^{\kappa'} = \xi^{\kappa'} s$$

と書かれるはずである．ところが ξ^κ は反変ベクトルの成分であるから

$$\xi^{\kappa'} = \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right)_0 \xi^\kappa$$

したがって，上式から

$$\bar{x}^{\kappa'} = \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right)_0 \bar{x}^\kappa$$

を得る．ゆえに標準座標系はこの場合，定数係数の１次変換を受けることがわかる．

4.4 テンソルの展げ

一般の座標系 (x^κ) における１つのテンソルの成分を $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$ としよう．いま１点 x^κ_0 を原点にとって，一般の座標系 (x^κ) から標準座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ へ変換

$$x^\kappa = x^\kappa_0 + \bar{x}^\kappa - \frac{1}{2!}\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}_0 \bar{x}^\mu \bar{x}^\lambda - \cdots\cdots$$

によって移れば，標準座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ におけるこのテンソルの成分 $\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x})$ は，公式

$$\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x}) = \frac{\partial\bar{x}^{\lambda_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{\lambda_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial\bar{x}^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial\bar{x}^{\mu_s}}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}(x)$$

によって与えられる．

この $\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}(\bar{x})$ を標準座標 $\bar{x}^\nu$ で t 回偏微分して得られる

$$D_{\nu_1\cdots\cdots\nu_t}\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s} = \frac{\partial^t\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}}{\partial\bar{x}^{\nu_1}\cdots\partial\bar{x}^{\nu_t}}$$

の $\bar{x}^\kappa=0$ における値はまた1つのテンソルの成分である．なぜなら一般の座標系 (x^κ) に

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, \cdots, x^n)$$

という座標変換を施こせば，これに対応する標準座標は

$$\bar{x}^{\kappa'} = \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\right)_0 \bar{x}^\kappa$$

という1次変換を受けるのであるから，標準座標系 $(\bar{x}^{\kappa'})$ における上記のテンソルの成分は

$$\bar{T}^{\lambda_1'\cdots\lambda_r'}_{\mu_1'\cdots\mu_s'} = \left(\frac{\partial x^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x^{\lambda_r'}}{\partial x^{\lambda_r}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x^{\mu_s}}{\partial x^{\mu_s'}}\right)_0\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}$$

で与えられる．この式の両辺を順次 $\bar{x}^{\nu_1'}, \cdots, \bar{x}^{\nu_t'}$ で偏微分すれば，我々は点 $\bar{x}^\kappa=0$ において

$$\begin{aligned}(D_{\nu_1'\cdots\nu_t'}T^{\lambda_1'\cdots\lambda_r'}_{\mu_1'\cdots\mu_s'})_0 = &\left(\frac{\partial x'^{\lambda_1'}}{\partial x^{\lambda_1}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x'^{\lambda_r'}}{\partial x^{\lambda_r}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x^{\mu_s}}{\partial x^{\mu_s}}\right)_0\\ &\left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x^{\nu_t}}{\partial x^{\nu_t'}}\right)_0 D_{\nu_1\cdots\nu_t}(\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0\end{aligned}$$

を得る．この式はまさに $(D_{\nu_1\cdots\nu_t}\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0$ が1つのテンソルの成分であることを表わしている．

さてテンソル $(D_{\nu_1\cdots\nu_t}\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s})_0$ のもとの一般の座標系 (x^κ) における点 x^κ_0 での成分 $(D_{\gamma_{r_1}\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0$ は

$$(D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0=\left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial\bar{x}^{\lambda_1}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial\bar{x}^{\lambda_r}}\right)_0\left(\frac{\partial\bar{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}}\right)_0\cdots\left(\frac{\partial\bar{x}^{\mu_s}}{\partial x^{\beta_s}}\right)_0\left(\frac{\partial\bar{x}^{\nu_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\right)_0$$
$$\cdots\left(\frac{\partial\bar{x}^{\nu_t}}{\partial x^{\gamma_t}}\right)_0 D_{\nu_1\cdots\nu_t}\bar{T}^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\mu_1\cdots\mu_s}$$

で与えられる．ところが点 x_0^κ においては

$$\left(\frac{\partial\bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}\right)_0=\delta^\lambda_\mu,\qquad \left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial\bar{x}^\mu}\right)_0=\delta^\lambda_\mu$$

であるから，上式は

$$(D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s})_0=\left(\frac{\partial^t\bar{T}^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}}{\partial\bar{x}^{\gamma_1}\cdots\partial\bar{x}^{\gamma_t}}\right)_0$$

となる．各点 x_0^κ においてこのような成分をもつテンソル $D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ を我々は，テンソル $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ の **t 階の展げ**と呼ぶ．

テンソル $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ の 1 階の展げが今まですでに学んだ共変微分と一致することは容易に験証し得るが，2 階以上の展げは一般に 2 次以上の共変微分とは一致しない．なぜならテンソル $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ の t 階の展げ $D_{\gamma_1\cdots\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ はその t 個の指標 $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ に関して対称であるが，テンソル $T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ の t 次の共変微分 $\nabla_{\gamma_1}\nabla_{\gamma_2}\cdots\nabla_{\gamma_t}T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$ は一般に t 個の指標 $\gamma_1\cdots\gamma_t$ に関して対称とはいえないからである．

次に一般の座標系 (x^κ) から出発して，点 x_0^κ を原点として得られる標準座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ におけるクリストッフェルの記号を $\overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}$ で表わし，同様に一般の座標系 $(x^{\kappa'})$ から出発して，上と同じ点を原点として得られる標準座標系 $(\bar{x}^{\kappa'})$ におけるクリストッフェルの記号を $\overline{\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}}$ で表わせば，$\overline{\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}}$ と $\overline{\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}}$ との間には

$$\overline{\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\}}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\lambda'}}\overline{\{{}^{\alpha}_{\gamma\beta}\}}+\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

という関係がある．しかるに標準座標系 $(\bar{x}^\kappa)$ から標準座標系 $(\bar{x}^{\kappa'})$ への変換公式は

$$\bar{x}^{\kappa'}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0\bar{x}^{\alpha},\qquad \bar{x}^{\alpha}=\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\kappa'}}\right)_0\bar{x}^{\kappa'}$$

で与えられるのであるから，上式は

$$\overline{\left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\}}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\mu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda'}}\right)_0\overline{\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}}$$

となる．したがって，この式を $\bar{x}^{\nu'}$ で偏微分すれば，

$$\frac{\partial\overline{\left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\nu'}}=\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\alpha}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\nu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\mu'}}\right)_0\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\lambda'}}\right)_0\frac{\partial\overline{\left\{{\alpha \atop \gamma\beta}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\delta}}$$

となる．したがって，点 x_0^{κ} において

$$D_{\nu}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{\partial\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\nu}}$$

とおけば，これは1つのテンソルの成分である．これを $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の1階の展げと呼ぶこととする．これと全く同様にして $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の t 階の展げ

$$D_{\nu_1\cdots\nu_t}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{\partial^t\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\nu_1}\cdots\partial\bar{x}^{\nu_t}}$$

もまた1つのテンソルの成分であることが証明される．このようにして得られるテンソルを我々は**標準テンソル**と呼ぶ．

次にこの標準テンソルと曲率テンソルとの関係を求めてみよう．

まず標準座標系 $(\bar{x}^{\kappa})$ においては

$$\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}=0$$

という式が恒等的に成立しなければならないのであるから，上式を $\bar{x}^{\nu}$ で偏微分すれば，我々は

$$\frac{\partial\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}+\overline{\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}\bar{x}^{\lambda}+\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}}\bar{x}^{\mu}=0$$

を得る．この式に $\bar{x}^{\nu}$ を乗じて ν に関して1から n までの総和を求めれば，$\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}=0$ という関係式によって

$$\frac{\partial\overline{\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\bar{x}^{\mu}\bar{x}^{\lambda}\bar{x}^{\nu}=0$$

を得る．したがって標準座標系の原点においては

$$\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \lambda\nu}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\mu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\mu}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\lambda}}=0$$

でなければならない．

一方，標準座標系 $(\bar{x}^{\kappa})$ の原点においては

$$\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}=0$$

であるから，曲率を与える式

$$\bar{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\mu}}+\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\alpha}}\right\}\left\{\overline{{\alpha \atop \mu\lambda}}\right\}-\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\alpha}}\right\}\left\{\overline{{\alpha \atop \nu\lambda}}\right\}$$

から，標準座標系の原点においては

$$\bar{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\mu}}$$

である．ここで μ と λ を入れかえれば

$$\bar{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \lambda\mu}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}-\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\mu}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\lambda}}$$

となるから，上の 2 式を加え合わせれば

$$\begin{aligned}\bar{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\bar{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa}&=2\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}-\left(\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \nu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\mu}}+\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\nu}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\right)\\&=3\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}.\end{aligned}$$

したがって標準座標系の原点においては

$$\frac{\partial\left\{\overline{{\kappa \atop \mu\lambda}}\right\}}{\partial\bar{x}^{\nu}}=\frac{1}{3}(\bar{K}_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\bar{K}_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa})$$

を得る．この式の両辺はいずれもテンソルの成分なのであるから，ここでもとの座標系 (x^{κ}) に戻れば，我々は $D_{\nu}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ という標準テンソルと $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ という曲率テンソルの間の関係式として

$$D_{\nu}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}=\frac{1}{3}(K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+K_{\nu\lambda\mu}{}^{\kappa})$$

を得る．

4.5 フルネー・セレーの公式

いま，リーマン空間中に1つの曲線を考え，これを曲線上の1定点から曲線に沿って測った弧の長さを媒介変数にとって $x^\kappa = x^\kappa(s)$ で表わそう．いま曲線上の点の座標 $x^\kappa(s)$ を媒介変数 s で微分して

$$\xi^\kappa_{(1)} = \frac{dx^\kappa}{ds}$$

とおけば，

$$g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = g_{\mu\lambda}\xi^\mu_{(1)}\xi^\lambda_{(1)} = 1$$

という恒等式から $\xi^\kappa_{(1)}$ が曲線に接している単位ベクトルであることがわかる．いま関係式

$$g_{\mu\lambda}\xi^\mu_{(1)}\xi^\lambda_{(1)} = 1$$

を曲線に沿って共変微分して，共変微分を $\dfrac{\delta}{\delta s}$ で表わすことにすれば，$\delta g_{\mu\lambda} = 0$ という恒等式を用いて

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^\mu_{(1)}\right)\xi^\lambda_{(1)} + g_{\mu\lambda}\xi^\mu_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^\lambda_{(1)}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad g_{\mu\lambda}\xi^\mu_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^\lambda_{(1)}\right) = 0$$

を得る．この式は $\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^\lambda_{(1)} \equiv 0$ でない限り，接線ベクトル $\xi^\kappa_{(1)}$ とその曲線に沿っての共変微分 $\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^\kappa_{(1)}$ とが直交していることを示している．ところが

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^\kappa_{(1)} = 0$$

は前にも述べたように測地線の微分方程式である．したがって我々の曲線が測地線ではないものとすれば $\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^\lambda_{(1)} \neq 0$ である．したがって，ベクトル $\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^\kappa_{(1)}$ の長さを $\kappa_{(1)}$ で表わし，$\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^\kappa_{(1)}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルを $\xi^\lambda_{(2)}$ で表わすこととすれば

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^\kappa_{(1)} = \kappa_{(1)}\xi^\kappa_{(2)}$$

を得る．ただし，ここに $\xi^{\kappa}_{(1)}$ および $\xi^{\kappa}_{(2)}$ は

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(2)}=0 \quad \text{および} \quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(2)}=1$$

を満足している．これらの式を更に曲線に沿って共変微分すれば

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(1)}\right)\xi^{\lambda}_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(2)}\right)\xi^{\lambda}_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

すなわち

$$\kappa_{(1)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(2)}\right)=0$$

を得る．これらの式は $\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}$ というベクトルが 2 つのベクトル $\xi^{\kappa}_{(1)}$ および $\xi^{\kappa}_{(2)}$ のいずれとも直交していることを示している．したがって $\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}\neq 0$ と仮定して，その長さを $\kappa_{(2)}$ で表わし，$\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルを $\xi^{\kappa}_{(2)}$ で表わすことにすれば

$$\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}=\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(3)},\quad \text{すなわち，}\quad \frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)}=-\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)}+\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(3)}$$

を得る．ただし，ここに $\xi^{\kappa}_{(3)}$ は

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(3)}=0,\qquad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(3)}=0,\qquad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\xi^{\lambda}_{(3)}=1$$

を満足するベクトルである．これらの式を更に曲線に沿って共変微分すれば

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(1)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(2)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(3)}\right)\xi^{\lambda}_{(3)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

すなわち

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$\kappa_{(2)}+g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(3)}\right)=0$$

を得る．ところが，これらの式は $\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}$ というベクトルが3つのベクトル $\xi^{\kappa}_{(1)}, \xi^{\kappa}_{(2)}$ および $\xi^{\kappa}_{(3)}$ のいずれとも直交していることを示している．したがって $\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}\neq 0$ と仮定して，その長さを $\kappa_{(3)}$ で表わし，$\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルを $\xi^{\kappa}_{(4)}$ で表わすこととすれば

$$\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}=\kappa_{(3)}\xi^{\kappa}_{(4)},\quad \text{すなわち，}\quad \frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(3)}=-\kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(2)}+\kappa_{(3)}\xi^{\kappa}_{(4)}$$

を得る．ただし，ここに $\xi^{\kappa}_{(4)}$ は

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(3)}\xi^{\lambda}_{(4)}=0,\quad g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(4)}\xi^{\lambda}_{(4)}=1$$

を満足するベクトルである．これらの式をさらに曲線に沿って共変微分していままでと全く同一の議論を繰り返していけば，我々はついに公式

$$\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n-1)}=-\kappa_{(n-2)}\xi^{\kappa}_{(n-2)}+\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n)}$$

に到達して，ここに互いに直交する n 個の単位ベクトル $\xi^{\kappa}_{(1)}, \xi^{\kappa}_{(2)}, \cdots, \xi^{\kappa}_{(n)}$ を得る．ここに最後の $\xi^{\kappa}_{(n)}$ は n 個の関係式

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\ \ \xi^{\lambda}_{(n)}=0,\\
&g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\ \ \xi^{\lambda}_{(n)}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n-1)}\xi^{\lambda}_{(n)}=0,\\
&g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n)}\ \ \xi^{\lambda}_{(n)}=1
\end{aligned}$$

を満足するベクトルであるが，これらの式をさらに曲線に沿って共変微分すれば

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(1)}\right)\xi^{\lambda}_{(n)} + g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(2)}\right)\xi^{\lambda}_{(n)} + g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(n-1)}\right)\xi^{\lambda}_{(n)} + g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n-1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$g_{\mu\lambda}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\mu}_{(n)}\right)\xi^{\lambda}_{(n)} + g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

すなわち

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(2)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\kappa_{(n-1)} + g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n-1)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0,$$

$$g_{\mu\lambda}\xi^{\mu}_{(n)}\left(\frac{\delta}{\delta s}\xi^{\lambda}_{(n)}\right) = 0$$

を得る．ところが，これらの方程式は $\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n-1)} + \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n)}$ というベクトルが n 個の互いに直交する単位ベクトル $\xi^{\kappa}_{(1)}, \xi^{\kappa}_{(2)}, \cdots, \xi^{\kappa}_{(n-1)}, \xi^{\kappa}_{(n)}$ のいずれとも直交していることを示している．ところが我々の空間の次元の数は n であるから，このようなことは $\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n-1)} + \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n)}$ の成分が全部 0 であるとき以外は起こり得ない．したがって

$$\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n-1)} + \frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n)} = 0, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n)} = -\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n-1)}$$

を得る．

このようにして我々がここに得た一連の公式

$$\begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(1)} = \kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(2)}, \\ \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(2)} = -\kappa_{(1)}\xi^{\kappa}_{(1)} + \kappa_{(2)}\xi^{\kappa}_{(3)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n-1)} = -\kappa_{(n-2)}\xi^{\kappa}_{(n-2)} + \kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n)}, \\ \dfrac{\delta}{\delta s}\xi^{\kappa}_{(n)} = -\kappa_{(n-1)}\xi^{\kappa}_{(n-1)} \end{cases}$$

を**フルネー・セレーの公式**と呼び，ここに現われる $n-1$ 個のスカラー $\kappa_{(1)}$, $\kappa_{(2)}, \cdots, \kappa_{(n-1)}$ をそれぞれ**曲線の第1曲率，第2曲率，……，第 $n-1$ 曲率**，n 個の互いに直交する単位ベクトル $\xi^{\kappa}_{(1)}, \xi^{\kappa}_{(2)}, \xi^{\kappa}_{(3)}, \cdots, \xi^{\kappa}_{(n)}$ をそれぞれ**曲線の接線，第1法線，第2法線，……，第 $n-1$ 法線**と呼ぶ．

5章

曲　面　論

5.1 n 次元リーマン空間 V_n 中の m 次元部分空間 V_m

今まで考えて来たようなn次元のリーマン空間を V_n で表わすこととし，そのなかの点は座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ で表わされ，その計量，すなわち2点 (x^κ) および $(x^\kappa+dx^\kappa)$ 間の距離 ds は，$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ で与えられるとしよう．いま $m(<n)$ 個の互いに独立な変数 $(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}}, \cdots, x^{\dot{m}})$ の関数 $x^\kappa = x^\kappa(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}}, \cdots, x^{\dot{m}})$ でその座標が表わされるような V_n 中の点の集合を考えれば，これらはn次元リーマン空間 V_n 中の m 次元部分空間を作っている．この部分空間の次元が確かに m であって，m より小さくないという事実は，x^κ の x^i $(h, i, j, k, \cdots = \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{m})$ に関する偏微分

$$B_i{}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}$$

で作った**関数行列の階数が m である**という事実によっていい表わされる．我々は今後この事実を仮定する．さて媒介変数 $(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}}, \cdots, x^{\dot{m}})$ の値が定まれば，これによってそれらの関数 x^κ の値が定まり，したがって部分空間中の点が定まるのであるから，$(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}}, \cdots, x^{\dot{m}})$ を部分空間中の点の座標と考えることができる．いまこの部分空間中に2つの非常に近い点 (x^i) と (x^i+dx^i) を考え，これらを V_n 中の点と考えれば，その座標はそれぞれ (x^κ) および $\left(x^\kappa + \dfrac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}dx^i\right)$ である．したがって，その2点間の距離 ds は

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda = g_{\mu\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}dx^j dx^i$$

で与えられる．したがって

$$g_{ji}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}g_{\mu\lambda}=B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

とおけば，m 次元の部分空間中の 2 点 (x^h) と (x^h+dx^h) との距離 ds は

$$ds^2=g_{ji}dx^j dx^i$$

で与えられるということになる．ところが $|g_{\mu\lambda}|=g\neq 0$ であって，$B_j{}^\mu$ で作った行列の階数は m であると仮定したのであるから，ここに現われる $g_{ji}=B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$ で作った m 行 m 列の行列式の値は 0 とはならない．しかも 2 次微分形式 $ds^2=g_{ji}dx^j dx^i$ は正値形式である．したがって

<u>n 次元リーマン空間 V_n 中の m 次元部分空間はまた $g_{ji}=B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$ を基本テンソルとする 1 つの m 次元リーマン空間である，</u>

という定理を得る．この m 次元の部分リーマン空間を我々は今後 V_m で示すことにする．

上の定理は部分空間 V_m 上の非常に近い 2 点間の距離は V_n の基本テンソルを用いて計算しても V_m の基本テンソルを用いて計算しても同一であることを示しているのである．

いま，部分空間 V_m 中の 1 点 (x^i) における微小ベクトル dx^i に対する，V_n 中の微小ベクトル dx^κ を考えれば，その間に

$$dx^\kappa=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}dx^i=B_i{}^\kappa dx^i$$

という関係がある．さて，この事実は，このベクトルを V_n のベクトルとみなせば，その成分は dx^κ, V_m のベクトルとみなせばその成分は dx^i であるということを示している．もう 1 つこのようなベクトル

$$\delta x^\kappa=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}\delta x^i=B_i{}^\kappa \delta x^i$$

を考えて，この 2 つのベクトル dx^κ と δx^κ とのなす角を計算してみよう．

$$\cos\theta = \frac{g_{\mu\lambda}dx^\mu \delta x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu \delta x^\lambda}}$$

$$= \frac{g_{\mu\lambda}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda dx^j \delta x^i}{\sqrt{g_{\mu\lambda}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda dx^j dx^i}\sqrt{g_{\mu\lambda}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda \delta x^j \delta x^i}}$$

$$= \frac{g_{ji}dx^j \delta x^i}{\sqrt{g_{ji}dx^j dx^i}\sqrt{g_{ji}\delta x^j \delta x^i}}.$$

しかるに $dx^\kappa = B_i{}^\kappa dx^i$ および $\delta x^\kappa = B_i{}^\kappa \delta x^i$ は部分空間 V_m に接している2つのベクトルを表わしているのであるから

部分空間 V_m に接している2つのベクトル間の角は，V_n の基本テンソルを用いて計算しても，V_m の基本テンソルを用いて計算しても同じである．

g_{ji} を V_m の**第1基本テンソル**とよぶ．

5.2 接 線, 法 線

我々は前節で，部分空間 V_m 中の微小ベクトル dx^i に対応する外の空間 V_n 中の微小ベクトル dx^κ は

$$dx^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}dx^i = B_i{}^\kappa dx^i$$

で与えられることをみた．ここに dx^κ は部分空間 V_m に接している微小ベクトルであって，上式はこれが $B_i{}^\kappa$ の1次結合で表わされるということを示している．しかも dx^i は任意の微小ベクトルと考えられるのであるから，$B_i{}^\kappa$ も κ に関して V_n のベクトルとみなせば，部分空間 V_m に接している m 個 $(i = \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{m})$ のベクトルであることがわかる．しかも我々は $B_i{}^\kappa$ で作った行列の階数は m と仮定したのであるから，$B_i{}^\kappa$ は V_m に接する1次独立な m 個のベクトルである．

したがって，今ここに V_m に接する V_n のベクトル v^κ があったとすれば，これは m 個の1次独立なベクトル $B_i{}^\kappa$ の1次結合として表わされるはずで

ある．すなわち

$$v^\kappa = B_i^{\ \kappa} v^i$$

を満足する v^i が存在するはずである．ここに現われる v^i は，V_n のベクトル v^κ の V_m における成分にほかならない．

さて，部分空間 V_m 上に1点をとれば，ここにおいて V_m に接する m 個の1次独立なベクトル $B_i^{\ \kappa}$ が与えられている．ところが V_n 中のある1点において1次独立なベクトルは全部で n 個とれるはずであるから，未だ $n-m$ 個の1次独立なベクトルを，この点でとることができるわけである．これらのベクトルとしてこの部分空間 V_m に垂直で，すなわち m 個の1次独立なベクトル $B_i^{\ \kappa}$ の全部に垂直で，しかも互いに直交する $n-m$ 個の単位ベクトル $B_P^{\ \kappa}$ $(P, Q, R, \cdots = \dot{m}+\dot{1}, \dot{m}+\dot{2}, \cdots, \dot{n})$ をとろう．

そうすると仮定によって

$$g_{\mu\lambda} B_i^{\ \mu} B_P^{\ \lambda} = 0, \qquad g_{\mu\lambda} B_P^{\ \mu} B_Q^{\ \lambda} = \delta_{PQ} = \begin{cases} 1 & P = Q, \\ 0 & P \neq Q \end{cases}$$

を得る．この $B_P^{\ \kappa}$ を部分空間 V_m 上の各点で考えられた**単位法線**と呼ぶ．

いま V_m の共変基本テンソル g_{ji} から反変基本テンソル g^{ik} を作って

$$B^i_{\ \lambda} = g_{\lambda\mu} g^{ij} B_j^{\ \mu}$$

を定義すれば

$$B^i_{\ \lambda} B_k^{\ \lambda} = g_{\lambda\mu} g^{ij} B_j^{\ \mu} B_k^{\ \lambda} = g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

となるから，

$$B_{P\lambda} = g_{\lambda\mu} B_P^{\ \mu}$$

とおけば，我々は次の4式を得る．

$$B_\lambda^{\ i} B_k^{\ \lambda} = \delta^i_k, \qquad B_{P\lambda} B_Q^{\ \lambda} = \delta_{PQ}, \qquad B^i_{\ \lambda} B^\lambda_{\ P} = 0, \qquad B_{P\lambda} B_k^{\ \lambda} = 0.$$

この式は $(B^i_{\ \lambda},\ B_{P\lambda})$ で作った n 行 n 列の行列と $(B_k^{\ \lambda},\ B_Q^{\ \lambda})$ で作った n 行列 n の行列が互いに逆の行列になっていることを示している．したがって上式からまた

$$B^i{}_\mu B_i{}^\lambda + B_{P\mu} B_P{}^\lambda = \delta_\mu^\lambda$$

という恒等式を得る．この式において更に指標の上げ下げを行なえば

$$g^{ji} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda + B_P{}^\mu B_P{}^\lambda = g^{\mu\lambda},$$

$$g_{ji} B^j{}_\mu B^i{}_\lambda + B_P{}^\mu B_P{}^\lambda = g_\mu{}^\lambda$$

という 2 つの恒等式を得る．

いま V_m 上の 1 点において必ずしも V_m に接していない 1 つのベクトル v^κ を考えれば，この v^κ はこの点において 1 次独立な n 個のベクトル $B_i{}^\kappa$ および $B_P{}^\kappa$ の 1 次結合として表わされるはずである．すなわち

$$v^\kappa = B_i{}^\kappa v^i + B_P{}^\kappa v_P$$

という形の式を得る．ここに $B_i{}^\kappa v^i$ は部分空間 V_m に接する方向への成分であり，$B_P{}^\kappa v_P$ は部分空間 V_m に垂直な方向への成分である．

5.3 V_n の $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ と V_m の $\{{}^{h}_{ji}\}$ との間の関係

前 2 節において我々は V_m の基本テンソル g_{ji} は

$$g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

で与えられることをみた．しかも部分空間 V_m はまた 1 つのリーマン空間なのであるから，V_m における共変微分を定義するところのクリストッフェルの 3 添字記号

$$\{{}^{h}_{ji}\} = \frac{1}{2} g^{ha}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}\right)$$

を作ることができるはずである．本節では V_n の $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ と V_m の $\{{}^{h}_{ji}\}$ との関係を求めておこう．

$$g_{ia} = B_i{}^\nu B_a{}^\mu g_{\nu\mu}$$

を x^j で偏微分して

$$\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} = \frac{\partial B_i{}^\nu}{\partial x^j} B_a{}^\mu g_{\nu\mu} + B_i{}^\nu \frac{\partial B_a{}^\mu}{\partial x^j} g_{\nu\mu} + B_i{}^\nu B_a{}^\mu B_j{}^\lambda \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}.$$

同様に

$$\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i}=\frac{\partial B_j{}^\nu}{\partial x^i}B_a{}^\mu g_{\nu\mu}+B_j{}^\nu\frac{\partial B_a{}^\mu}{\partial x^i}g_{\nu\mu}+B_j{}^\nu B_a{}^\mu B_i{}^\lambda\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda},$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}=\frac{\partial B_j{}^\nu}{\partial x^a}B_i{}^\mu g_{\nu\mu}+B_j{}^\nu\frac{\partial B_i{}^\mu}{\partial x^a}g_{\nu\mu}+B_j{}^\nu B_i{}^\mu B_a{}^\lambda\frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}.$$

したがって $\dfrac{\partial B_j{}^\nu}{\partial x^i}=\dfrac{\partial B_i{}^\nu}{\partial x^j}=\dfrac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^j\partial x^i}$ に注意すれば

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}B_a{}^\nu B_j{}^\mu B_i{}^\lambda\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)+B_a{}^\nu\frac{\partial B_i{}^\mu}{\partial x^j}g_{\nu\mu}$$

を得る．この式に g^{ha} を掛けて a で縮約すれば

$$\left\{{h \atop ji}\right\}=\frac{1}{2}g^{ha}\left(\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^a}\right)$$

$$=g^{ha}B_a{}^\nu\left[\frac{1}{2}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)+\frac{\partial B_i{}^\mu}{\partial x^j}g_{\nu\mu}\right]$$

$$=B^h{}_\kappa\left[\frac{1}{2}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g^{\kappa\nu}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right)+\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}\right].$$

したがって

$$\left\{{h \atop ji}\right\}=B^h{}_\kappa\left(B_j{}^\mu B_i{}^\lambda\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}+\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}\right)$$

を得る．これは今後しばしば利用される公式である．

5.4　V_m に沿っての拡張された共変微分，オイラー・スカウテンの曲率テンソル

我々が前に定義した量

$$B_i{}^\kappa=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}$$

が，指標 κ に対して１つの V_n の反変ベクトルを表わすことは明らかである．なぜなら V_n の座標変換

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

に対して $B_i{}^\kappa$ は

$$B_i{}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} B_i{}^\kappa$$

という変換を受けるからである．それならば指標 i に対して $B_i{}^\kappa$ はどんな幾何学的量を表わしているのであろうか．いま V_m の座標変換

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$

を行なってみれば $B_i{}^\kappa$ は

$$B_{i'}{}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x_i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} B_i{}^\kappa$$

という変換を受ける．したがって $B_i{}^\kappa$ は指標 i に関しては V_m の共変ベクトルであることがわかる．

さて我々は V_n のベクトル u^κ の共変微分 δu^κ は

$$\delta u^\kappa = du^\kappa + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} dx^\mu v^\lambda$$

等で，V_m のベクトル v^h の共変微分 δv^h は

$$\delta v^h = dv^h + \left\{{h \atop ji}\right\} dx^j v^i$$

等で与えられることを知っている．それならば $B_i{}^\kappa$ のように V_n に対する指標と V_m に対する指標とを両方もった量に対する共変微分はこれをどう定義すればよいのであろうか．

この法則を見出すために V_n の反変ベクトルを u^κ, V_m の共変ベクトルを v_j と置いて $v_i u^\kappa$ という $B_i{}^\lambda$ と類似の量を作り，この共変微分が普通の微分の規則に従うものと仮定すれば

$$\begin{aligned}\delta(v_i u^\kappa) &= (\delta v_i)u^\kappa + v_i(\delta u^\kappa)\\ &= (dv_i - \left\{{h \atop ji}\right\} dx^j v_h)u^\kappa + v_i(du^\kappa + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} dx^\mu u^\lambda)\\ &= d(v_i u^\kappa) + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} dx^\mu v_i u^\lambda - \left\{{h \atop ji}\right\} dx^j v_h u^\kappa\end{aligned}$$

となる．したがって $B_i{}^\kappa$ のような量の共変微分を

$$\delta B_j{}^\kappa = dB_j{}^\kappa + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} dx^\mu B_i{}^\lambda - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} dx^j B_h{}^\kappa,$$

共変微分係数を

$$\nabla_j B_i{}^\kappa = \frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} B_h{}^\kappa$$

で定義するのが最も自然であろう．この規則をもう少し明らかにするために，たとえば $T_{i\lambda}{}^\kappa$ という量の共変微分および共変微分係数を書き下せば，

$$\delta T_{i\lambda}{}^\kappa = dT_{i\lambda}{}^\kappa + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\nu} \right\} dx^\mu T_{i\lambda}{}^\nu - \left\{ {}^{\alpha}_{\mu\lambda} \right\} dx^\mu T_{i\alpha}{}^\kappa - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} dx^j T_{h\lambda}{}^\kappa,$$

$$\nabla_j T_{i\lambda}{}^\kappa = \frac{\partial T_{i\lambda}{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\alpha} \right\} B_j{}^\mu T_{i\lambda}{}^\alpha - \left\{ {}^{\alpha}_{\mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu T_{i\alpha}{}^\kappa - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} T_{h\lambda}{}^\kappa$$

である．このように定義された共変微分および共変微分係数をそれぞれ V_m に沿っての拡張された共変微分および共変微分係数，またはファン・デア・ベルデン-ボルトロッティの共変微分および共変微分係数と呼ぶ．この共変微分および共変微分係数がやはりテンソルの性質をもっており，普通の微分と全く同じ規則に従う事実は，3章の3.2節におけると全く同様な方法で証明することができるから，ここでは繰り返して述べないことにする．

さて $B_i{}^\kappa = \dfrac{\partial x^\kappa}{\partial x^i}$ に注意して $\nabla_j B_i{}^\kappa$ を書きかえると

$$\begin{aligned}\nabla_j B_i{}^\kappa &= \frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x_j} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} B_h{}^\kappa \\ &= \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^j \partial x^i} + \left\{ {}^{\kappa}_{\mu\lambda} \right\} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} - \left\{ {}^{h}_{ji} \right\} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^h}\end{aligned}$$

となる．我々はこのテンソルを

$$H_{ji}{}^\kappa = \nabla_j B_i{}^\kappa$$

とおいて，V_m の V_n **に対する曲率テンソル**，または**オイラー・スカウテンの曲率テンソル**と呼ぶ．

このオイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{ji}{}^\kappa$が，j と i に関して対称であることは上の定義から明らかであろう．また $B^h{}_\kappa H_{ji}{}^\kappa$ を作ってみれば

$$B^h{}_\kappa H_{ji}{}^\kappa = B^h{}_\kappa\left(\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - \left\{{k \atop ji}\right\} B_k{}^\kappa\right)$$
$$= B^h{}_\kappa\left(\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda\right) - \left\{{h \atop ji}\right\}$$

となるが，この式の右辺は前節の最後に証明した式によって恒等的に 0 となる．したがって

$$B^h{}_\kappa H_{ji}{}^\kappa = 0, \quad \text{すなわち，} \quad g_{\mu\lambda} B_h^\mu H_{ji}{}^\lambda = 0$$

を得る．この式は $H_{ji}{}^\kappa$ を κ に関して V_n の反変ベクトルであるとみなせば，すべての $B_i{}^\kappa$ に垂直，したがって部分空間 V_m に垂直であることを示している．したがって，これらは $B_P{}^\kappa$ の 1 次結合として表わされる．すなわち

$$H_{ji}{}^\kappa = H_{jiP} B_P{}^\kappa.$$

ここに現われる H_{jiP} は

$$H_{jiP} = g_{\mu\lambda} H_{ji}{}^\mu B_P{}^\lambda$$

から計算される．H_{jiP}，は，法線 $B_P{}^\kappa$ に関する，部分空間 V_m の**第 2 基本テンソル**とよばれる．

我々の部分空間の次元が特に $m = n-1$ の場合には，これを**超曲面**と呼ぶのであるが，この場合には部分空間に垂直な単位ベクトルはただ 1 つしかない．したがって

$$B_{\dot n}^{\;\kappa} = B^\kappa, \qquad H_{ji\dot n} = H_{ji}$$

とおけば

$$H_{jk}{}^\lambda = H_{jk} B^\lambda$$

となる．さらに外のリーマン空間 V_n が 3 次元のユークリッド空間となり，$m = 2$ の場合には H_{ji} は普通の微分幾何学における第 2 基本形式

$$H_{\dot 1\dot 1} dx^{\dot 1} dx^{\dot 1} + 2H_{\dot 1\dot 2} dx^{\dot 1} dx^{\dot 2} + H_{\dot 2\dot 2} dx^{\dot 2} dx^{\dot 2}$$

の係数となる．

5.5 部分空間 V_m 上の曲線

部分空間 V_m 上に 1 つの曲線 $x^h(s)$ を考えよう．ここに s は曲線の長さを

表わす媒介変数であるとする．これらの関数 $x^h(s)$ を V_m を表わす方程式

$$x^\kappa = x^\kappa(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$

に代入すれば，我々は $x^\kappa(s)$ を得るが，これはこの曲線を V_n の曲線とみなしたときの方程式である．この $x^\kappa(s)$ を s で微分して単位接線ベクトルを作れば

$$\frac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^\kappa \frac{dx^h}{ds}$$

を得る．この式をさらに曲線に沿って共変微分すれば

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^\kappa \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^\kappa \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

を得る．

ここに現われる3つのベクトル $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds}$, $B_h{}^\kappa \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$, $H_{ji}{}^\kappa \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ をそれぞれ V_m 上の曲線の**絶対曲率ベクトル**，**相対曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**，その長さをそれぞれ**絶対曲率**，**相対曲率**，**法曲率**と呼ぶ．ところが $B_h{}^\kappa \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$ は部分空間 V_m に接するベクトル，$H_{ji}{}^\kappa \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ は部分空間 V_m に垂直なベクトルを表わしているのであるから，上式から以下の種々の興味ある定理が得られる．

定理 1.　絶対曲率ベクトルは相対曲率ベクトルと法曲率ベクトルとの和である．

これは定義から明らかである．

定理 2.　絶対曲率の自乗は相対曲率の自乗と法曲率の2乗の和に等しい．

なぜなら絶対曲率ベクトルを A^κ で，相対曲率ベクトルを R^κ で，法曲率ベクトルを N^κ で表わせば

$$A^\kappa = R^\kappa + N^\kappa$$

ところが R^κ と N^κ は垂直，すなわち $g_{\mu\lambda}R^\mu N^\lambda = 0$ であるから，上式から

$$g_{\mu\lambda}A^\mu A^\lambda = g_{\mu\lambda}R^\mu R^\lambda + g_{\mu\lambda}N^\mu N^\lambda$$

を得るからである．

定理 3. 絶対曲率を A で，法曲率を N で，絶対曲率ベクトルと法曲率ベクトルとのなす角を θ で表わせば

$$N = A\cos\theta.$$

なぜなら仮定によって

$$g_{\mu\lambda}A^{\mu}N^{\lambda} = AN\cos\theta$$

この式に $A^{\kappa} = R^{\kappa} + N^{\kappa}$ を代入して $g_{\mu\lambda}R^{\mu}N^{\lambda} = 0$, $g_{\mu\lambda}N^{\mu}N^{\lambda} = N^2$ に注意すれば $N^2 = AN\cos\theta$, すなわち $N = A\cos\theta$ を得るからである．これは有名な**ムーニエの定理**の拡張になっている．

定理 4. $x^{\kappa}(s)$ が V_n の測地線であれば，これは同時に部分空間 V_m の測地線でもある．

仮定によって

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

の左辺は 0 である．しかるに $B_h{}^{\kappa}\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^h}{ds}$ と $H_{ji}{}^{\kappa}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}$ は互いに垂直なベクトルなのであるから，その和が 0 というならおのおのが 0 でなければならない．したがって

$$B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0, \qquad \text{これから} \quad \frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0.$$

この最後の式は $x^h(s)$ が V_m の測地線であることを示しているのであるから，これで定理 4 は証明された．

定理 5. $x^h(s)$ が V_m の測地線になるための必要にしてかつ十分な条件は，曲線 $x^{\kappa}(s)$ の絶対曲率ベクトルが V_m に垂直なことである．

なぜなら $x^h(s)$ が V_m の測地線であるとすれば $\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^h}{ds} = 0$, したがって

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds},$$

すなわち絶対曲率ベクトルは V_m に垂直である．したがってこの条件は必要

である．次に絶対曲率ベクトル $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}$ が V_m に垂直であるとすれば

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}=B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}+H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

において $B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$ は0でなければならない．したがって $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$, ゆえに $x^h(s)$ は V_m の測地線となるからこの条件は十分である．

定理 6.　部分空間中の曲線上の1点における法曲率ベクトルは，この点でこの曲線に接する部分空間の測地線の法曲率ベクトルに等しい．

なぜなら法曲率ベクトル $H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ は方向 $\frac{dx^h}{ds}$ のみできまるものであるから，$\frac{dx^h}{ds}$ さえ同じであれば $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}$ が0であってもなくても同じ値を持っている．ところが $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}=0$ の場合は $H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$ は $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}$ と等しくなるからである．

5.6　平均曲率，平均曲率ベクトル

いま部分空間 V_m 上に

$$g_{ji}h_{(a)}^j h_{(b)}^i=\delta_{ab}=\begin{cases}1 & a=b\\ 0 & a\neq b\end{cases}\quad (a,b,c,\cdots=1,2,\cdots,m)$$

を満足する互いに垂直な m 個の単位ベクトル $h_{(a)}^h$ をとれば，$h_{(a)}^h$ の方向へ向かう曲線の法曲率ベクトルは $H_{ji}{}^{\kappa}h_{(a)}^j h_{(a)}^i$ である．したがって，これらの法曲率ベクトルのすべての $h_{(a)}^h$ に対する平均を求めれば $\sum_{a=1}^{m}h_{(a)}^j h_{(a)}^i=g^{ji}$ という関係式によって

$$\frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m}H_{ji}{}^{\kappa}h_{(a)}^j h_{(a)}^i=\frac{1}{m}H_{ji}{}^{\kappa}g^{ji}$$

を得る．この結果は $h_{(a)}^h$ の選び方に関係しない．この部分空間 V_m に垂直なベクトル $\frac{1}{m}H_{ji}{}^{\kappa}g^{ji}$ を**平均曲率ベクトル**と呼び，その長さを**平均曲率**と呼ぶ．上の事実から我々は次の定理を得る．

定理 7. 部分空間上の点における互いに垂直な m 個の方向に対する部分空間の法曲率ベクトルの平均は，この方向のとり方に無関係である．

5.7 曲　率　線

まず，我々の部分空間が超曲面である場合から話を始めよう．この場合には超曲面への単位法線はただ1本しかないのであるから，これを B^κ で表わすことにすれば，オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{ji}{}^\kappa$ は

$$H_{ji}{}^\kappa = H_{ji} B^\kappa$$

と書かれる．したがって超曲面に接する方向 h^h に対する超曲面の法曲率 N は

$$N = \frac{H_{ji} h^j h^i}{g_{ji} h^j h^i}$$

で与えられる．この N の極値を与えるような h^h は

$$(H_{ji} - N g_{ji}) h^i = 0$$

を満足せねばならず，この場合の N は行列方程式

$$| H_{ji} - N g_{ji} | = 0$$

の根でなければならない．これらの条件を満足する h^h という方向を**主方向**，N を**主曲率**と呼んで，つねに主方向へ向かうような曲線を**曲率線**と呼ぶ．

いま，主曲率 N を定める方程式 $| H_{ji} - N g_{ji} | = 0$ の根が全部互いに異なると仮定して，これを $N_{(1)}, N_{(2)}, \cdots\cdots, N_{(n-1)}$，これらの値に対応する主方向に向かう単位ベクトルをそれぞれ $h_{(1)}^h, h_{(2)}^h, \cdots, h_{(n-1)}^h$ とすれば

$$(H_{ji} - N_{(a)} g_{ji}) h_{(a)}^i = 0 \quad (a = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$(H_{ji} - N_{(b)} g_{ji}) h_{(b)}^i = 0 \quad (b = 1, 2, \cdots, n-1),$$

この第1式に $h_{(b)}^j$，第2式に $h_{(a)}^j$ を掛けて縮約し，しかる後辺々相減ずれば

$$(N_{(a)} - N_{(b)}) g_{jk} h_{(a)}^j h_{(b)}^k = 0.$$

ところが $a \neq b$ なる限り $N_{(a)} \neq N_{(b)}$ であるから，上式から

$$g_{ji}h^j_{(a)}h^i_{(b)} = 0 \qquad (a \neq b)$$

を得る．したがって，この場合，主方向は全部互いに直交し，$h^i_{(a)}$ は超曲面に接する $(n-1)$ 重系を作っているわけである．したがって任意の単位ベクトル h^h は $h^h_{(a)}$ の1次結合として

$$h^h = \cos\alpha_1 h^h_{(1)} + \cos\alpha_2 h^h_{(2)} + \cdots + \cos\alpha_{n-1} h^h_{(n-1)}$$

と書き表わされるはずである．ただし，ここに $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ は h^h とそれぞれ $h^h_{(1)}$，$h^h_{(2)}, \cdots, h^h_{(n-1)}$ とのなす角を表わしている．したがってこの式を h^i という方向に対する法曲率を定義する式

$$N = \frac{H_{ji}h^j h^i}{g_{ji}h^j h^i} = H_{ji}h^j h^i$$

に代入すれば

$$N = N_{(1)}\cos^2\alpha_1 + N_{(2)}\cos^2\alpha_2 + \cdots + N_{(n-1)}\cos^2\alpha_{n-1}$$

を得る．ただし，ここに

$$N_{(a)} = H_{ji}h^j_{(a)}h^i_{(a)}$$

であって，$H_{ji}h^j_{(a)}h^i_{(b)}$ は $a \neq b$ のときは0となる．上式は有名な**オイラーの定理**の拡張である．

次に一般の m 次元の部分空間の曲率線に移ろう．この場合には，この部分空間に垂直でかつ互いに垂直な単位ベクトル B_P^κ は $n-m$ 個あるから，オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{ji}{}^\kappa$ は

$$H_{ji}{}^\kappa = H_{jiP}B_P^\kappa$$

と書かれる．この場合にも前と同様に

$$(H_{jiP} - N_P g_{ji})h^i = 0$$

を満足する N_P を法線 B_P^κ に関する**主曲率**，h^h を法線 B_P^κ に対する**主曲率方向**と呼び，つねに主曲率方向へ向かう曲線を**曲率線**と呼ぶ．したがって，この場合には主曲率方向，曲率線の定義は法線 B_P^κ の選び方に関係するわけである．

5.8 漸 近 曲 線

やはりまず $n-1$ 次元の超曲面の場合から話を始めよう．この場合にはオイラー・スカウテンの曲率テンソルは

$$H_{ji}{}^{\kappa} = H_{ji} B^{\kappa}$$

と書かれる．いまこの超曲面に接する2つのベクトルを u^h, v^h とするとき

$$H_{ji} u^i v^i = 0$$

が満足されているならば，u^h と v^h は超曲面上で互いに**共役な方向**をもっているといわれる．またその方向がつねに互いに共役であるような超曲面上の2つの曲線群は**互いに共役**であるといわれる．したがって前節において述べたところを思い出してみれば，超曲面上の1点における主方向はつねに互いに共役であって，2つの曲率線の群はまた互いに共役である．

次に超曲面上の1つの方向 u^h が自分自身と共役なら，すなわち

$$H_{ji} u^j u^i = 0$$

を満足しているなら，u^h の定める方向を**漸近方向**と呼び，つねに漸近方向へ向う曲線を**漸近曲線**と呼ぶ．したがって漸近曲線 $x^h(s)$ は方程式

$$H_{ji} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} = 0, \text{ すなわち，} H_{ji}{}^{\kappa} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds} = 0$$

を満足しているわけである．したがって

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^\kappa \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^h}{ds} + H_{ji}{}^\kappa \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^i}{ds}$$

に注意すれば，次の定理を得る．

定理 8. 超曲面上の曲線が漸近曲線となるために必要にして十分な条件は，その曲線の絶対曲率ベクトルが超曲面に接していることである．

なぜなら，もしこの曲線が超曲面の漸近曲線なら $H_{ji}{}^\kappa \dfrac{dx^j}{ds} \dfrac{dx^i}{ds} = 0$，したがって $\dfrac{\delta}{\delta s} \dfrac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^\kappa \dfrac{\delta}{\delta s} \dfrac{dx^h}{ds}$，すなわち絶対曲率ベクトルは超曲面に接し

ている．また絶対曲率ベクトルが超曲面に接しいれば $H_{ji}{}^{\kappa}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}=0$ すなわち $H_{ji}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}=0$ を得るからである．

定理 9. 超曲面上の1つの曲線がこれを包む空間 V_n の測地線となるための必要十分条件は，この超曲面上の曲線が超曲面の測地線となると同時に漸近曲線となることである．

なぜなら超曲面上の曲線 $x^h(s)$ が V_n の測地線であるというなら

$$0=\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^{\kappa}}{ds}=B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds}+H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

から $\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^h}{ds}=0$, および, $H_{ji}{}^{\kappa}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}=0$ を得る．これは超曲面上の曲線 $x^h(s)$ が超曲面の測地線となると同時に漸近曲線となることを示している．逆に超曲面上の曲線 $x^i(s)$ が超曲面上の測地線であると同時に漸近曲線であるというなら $\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^h}{ds}=0$, $H_{ji}{}^{\kappa}\dfrac{dx^j}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}=0$. したがって $\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^{\kappa}}{ds}=0$, すなわち曲線 $x^{\kappa}(s)$ は V_n の測地線である．

次に一般の部分空間 V_m の場合に移ろう．この場合には，部分空間 V_m に垂直でかつ互いに垂直な $n-m$ 個の単位ベクトルを B_P^{κ} とすれば，$H_{ji}{}^{\kappa}$ は $H_{ji}{}^{\kappa}=H_{jiP}B_P{}^{\kappa}$ と書けるが，H_{jiP} はこの法線のとり方に関係する量である．さて，一般の部分空間 V_m に対して漸近方向や漸近曲線を定義するに当たっては，この法線のとり方に関係せず，また $m=n-1$ の場合には前述の定義に戻るような定義を与えることが望ましい．この目的のためにテンソル

$$g_{\mu\lambda}H_{kj}{}^{\mu}H_{ih}{}^{\lambda}=H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}$$

をとって

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}u^k v^j u^i v^h=0$$

で共役方向 u^h および v^h を定義することにする．この定義が法線 $B_P{}^{\kappa}$ のとり方に無関係であることは明らかであるが，$m=n-1$ の場合には $H_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}B^{\kappa}$ であって

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}u^k v^j u^i v^h = H_{kj}H_i{}^h u^k v^j u^i v^h = (H_{ji}u^j v^i)^2 = 0$$

より $H_{ji}u^j v^i = 0$ を得るから前の定義も含んでいるわけである．あとは前と同様に常に互いに共役な接線をもつ2つの曲線群を互いに共役な曲線群，自分自身に共役な方向をもつ方向を漸近方向，つねに漸近方向に向かう曲線を漸近曲線と呼ぶ．漸近曲線 $x^h(s)$ に対しては

$$H_{kj}{}^{\lambda}H_{ih\lambda}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^h}{ds} = 0, \quad \text{すなわち} \quad H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$$

が成立するのであるから，前の定理8および9も一般の部分空間に対して成立することは明らかであろう．

5.9 全測地曲面，全臍曲面

部分空間 V_m に含まれるどんな測地線も，これを V_n の曲線とみなせば，これが V_n の測地線になっているとき，この部分空間を**全測地曲面**と呼ぶ．そのためにはどんな条件が必要かというと，V_m の曲線 $x^h(s)$ が V_m の測地線であるとき，すなわち $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} = 0$ のとき，これを V_n の曲線 $x^\kappa(s)$ とみなせば，これがまた V_n の測地線である，すなわち $\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds} = 0$ というのであるから，

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^\kappa}{ds} = B_h{}^{\kappa}\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^h}{ds} + H_{jk}{}^{\lambda}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds}$$

から，V_m 上の如何なる曲線に対しても

$$H_{ji}{}^{\kappa}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0$$

でなければならない．ところが $H_{ji}{}^{\kappa} = H_{ij}{}^{\kappa}$ であるから，上式から

$$H_{ji}{}^{\kappa} = 0$$

を得る．この条件が十分であることは明らかであるから我々は次の定理を得る．

定理 10. 部分空間 V_m が全測地的であるために必要にしてかつ十分な条

件は $H_{ji}{}^{\kappa}=0$ である.

定理 11.　全測地曲面は極小集合体であって，その曲率線は不定である．[次節参照].

いま V_m に接しているベクトル v^h があるとき，これを V_n のベクトルとみなせば，その成分は

$$v^{\kappa}=B_h{}^{\kappa}v^h$$

で与えられる．いま V_m を全測地曲面として上式を共変微分すれば

$$\delta v^{\kappa}=B_h{}^{\kappa}\delta v^h+H_{ji}{}^{\kappa}v^j dx^i=B_h{}^{\kappa}\delta v^h,$$

したがって，次の定理を得る．

定理 12.　全測地曲面 V_m に接している1つのベクトルを外の空間 V_n において曲面に沿って平行移動すれば，結果はなお曲面に接しており，しかも V_m においても平行である．

次に部分空間 V_m 上の1点で主曲率方向が不定になるならば，この点を V_m の**臍点**という．1点が臍点になるための条件は，この点で方程式

$$H_{ji}{}^{\kappa}=g_{ji}H^{\kappa}$$

が成立することである．上式に g^{ji} を縮約すれば

$$g^{ba}H_{ba}{}^{\kappa}=mH^{\kappa}\qquad\therefore\quad H^{\kappa}=\frac{1}{m}g^{ba}H_{ba}{}^{\kappa}$$

したがって，上の条件は

$$H_{ji}{}^{\kappa}=\frac{1}{m}g^{ab}H_{ba}{}^{\kappa}g_{ji}$$

となる．この条件が部分空間 V_m 上の各点で成立するなら，この部分空間を**全臍曲面**と呼ぶ．全測地曲面は全臍曲面の一つの特別な場合である．

5.10　極 小 集 合 体

いま n 次元のリーマン空間 V_n 中に，1つの閉じた $m-1$ 次元の部分空間 V_{m-1} が与えられた場合に，V_{m-1} を含む m 次元の部分空間 V_m であって，V_{m-1} によって限られた m 次元的体積が極値をとるようなものを，我々は**極**

小集合体と呼ぶ.

与えられた m 次元部分空間 V_m

$$x^\kappa = x^\kappa(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$

が極小集合体であるための条件を求めよう.

さて m 次元部分空間 V_m の V_{m-1} で限られた部分の m 次元的体積は積分

$$\int\int\cdots\int_{V_m}\sqrt{g'}\,dx^1\,dx^2\cdots\cdots dx^m$$

で与えられる. ただし, ここに g' は, V_m の基本共変テンソル

$$g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

から作られた行列式の値を示すものとする.

いま, 上の積分の第1変分が0ということを表わす, 拡張された意味でのオイラーの偏微分方程式を書き下ろせば

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_i{}^\lambda}\right) - \frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^\lambda} = 0$$

である. ところが

$$g' = |\,g_{ji}\,| = |\,B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}|$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_h{}^\lambda} &= \frac{1}{2\sqrt{g'}}\,\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\,\frac{\partial g_{ji}}{\partial B_h{}^\lambda}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{g'}}\,g'\,g^{ji}(\delta_j^h\,B_i{}^\nu g_{\lambda\nu} + \delta_i^h B_j{}^\mu g_{\mu\lambda})\\ &= \sqrt{g'}\,g^{hk}\,B_k{}^\nu g_{\lambda\nu}\\ &= \sqrt{g'}\,B^h{}_\lambda,\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_h{}^\lambda}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{g'}}\,\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\,\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^h}\,B^h{}_\lambda + \sqrt{g'}\,\frac{\partial B^h{}_\lambda}{\partial x^h}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{g'}}\,g'\,g_{ji}(\{{}^a_{hj}\}\,g_{ai} + \{{}^a_{hi}\}\,g_{ja})\,B^h{}_\lambda + \sqrt{g'}\,\frac{\partial B^h{}_\lambda}{\partial x^h}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{g'}\left(\frac{\partial B^h{}_\lambda}{\partial x^h} + B^h{}_\lambda \left\{ {i \atop hi} \right\}\right),$$

また

$$\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{g'}}\frac{\partial g'}{\partial g_{ji}}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\lambda}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g'}} g' g^{ji} B_j{}^\nu B_i{}^\mu \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{g'}\, g^{ji} B_j{}^\nu B_i{}^\mu \left(\left\{ {\alpha \atop \lambda\nu} \right\} g_{\alpha\mu} + \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\} g_{\nu\alpha}\right)$$

$$= \sqrt{g'}\, B^i{}_\alpha \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\} B_i{}^\mu$$

である．したがって，オイラーの偏微分方程式より

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial B_i{}^\lambda}\right) - \frac{\partial\sqrt{g'}}{\partial x^\lambda} = \sqrt{g'}\left(\frac{\partial B^i{}_\lambda}{\partial x^i} + B^i{}_\lambda \left\{ {h \atop ih} \right\} - B^i{}_\alpha B_i{}^\mu \left\{ {\alpha \atop \lambda\mu} \right\}\right)$$

$$= \sqrt{g'}\, \nabla_i B^i{}_\lambda = 0$$

を得る．ところが

$$\nabla_i B^i{}_\lambda = \nabla_i (g^{ih} g_{\lambda\kappa} B_h{}^\kappa)$$

$$= g^{ih} g_{\lambda\kappa} \nabla_i B_h{}^\kappa$$

$$= g^{ih} g_{\lambda\kappa} H_{ih}{}^\kappa$$

であるから，結局 V_m が極小集合体となるための条件は

$$g^{ba} H_{ba}{}^\kappa = 0$$

である．したがって我々は次の定理を得る．

定理 13.　V_n 中の V_m が極小集合体となるために必要かつ十分な条件は，その平均曲率ベクトルが 0 になることである．

5.11　ワインガルテンの公式

部分空間 V_m に接する m 個のベクトル $B_i{}^\kappa$ と，これに垂直な $n-m$ のベクトル $B_P{}^\kappa$ は

$$g_{\mu\lambda}B_i{}^{\mu}B_P{}^{\lambda}=0$$

を満足しているのであるから，これを部分空間に沿って共変微分すれば

$$g_{\mu\lambda}H_{ji}{}^{\mu}B_P{}^{\lambda}+g_{\mu\lambda}B_i{}^{\mu}\nabla_j B_P{}^{\lambda}=0.$$

この式に g^{hi} を掛けて縮約すれば

$$H^h{}_{jP}+B^h{}_{\lambda}\nabla_j B_P{}^{\lambda}=0,\quad (H^h{}_{jP}=g^{hi}H_{ijP}).$$

さらに，この式に $B_h{}^{\kappa}$ を掛けて縮約すれば

$$B_i{}^{\kappa}H^i{}_{jP}+B_i{}^{\kappa}B^i{}_{\lambda}\nabla_j B_P{}^{\lambda}=0.$$

ところが

$$B_i{}^{\kappa}B^i{}_{\lambda}=\delta_{\lambda}^{\kappa}-B_Q{}^{\lambda}B_{Q\lambda}$$

であるから，これを上式に代入すれば

$$B_i^{\kappa}H^i{}_{jP}+(\delta_{\lambda}^{\kappa}-B_Q^{\kappa}B_{Q\lambda})\nabla_j B_P{}^{\lambda}=0.$$

したがって

$$g_{\mu\lambda}(\nabla_j B_P{}^{\mu})B_Q{}^{\lambda}=L_{jPQ}$$

とおけば

$$B_i{}^{\kappa}H^i{}_{jP}+\nabla_j B_P{}^{\kappa}-L_{jPQ}B_Q{}^{\kappa}=0,$$

すなわち

$$\nabla_j B_P{}^{\kappa}=-B_i{}^{\kappa}H^i{}_{jP}+L_{jPQ}B_Q{}^{\kappa}$$

を得る．これは**ワインガルテンの公式**の拡張になっている．さて

$$g_{\mu\lambda}B_P{}^{\mu}B_Q{}^{\lambda}=\delta_{PQ}$$

という恒等式を曲面に沿って共変微分すれば

$$g_{\mu\lambda}[(\nabla_j B_P{}^{\mu})B_Q{}^{\lambda}+B_P{}^{\mu}(\nabla_j B_Q{}^{\lambda})]=0,$$

すなわち

$$L_{jPQ}+L_{jQP}=0,$$

したがって，L_{jPQ} は P と Q に関して交代である．L_{jPQ} は $B_P{}^{\kappa}$ に関する V_m の**第3基本テンソル**とよばれる．したがって，我々の部分空間が超曲面の場合には，L_{jPQ} は恒等的に 0 となるから，ワインガルテンの公式は

$$\nabla_j B^{\kappa}=-B_i^{\kappa}H^i{}_j$$

となる．これから次の定理が得られる．

定理 14.　全測地超曲面の法線は全部互いに平行である．

また超曲面上の曲率線 $x^h(s)$ に沿っては $H^h_{\cdot k}\dfrac{dx^k}{ds}=N\dfrac{dx^h}{ds}$ であるから，上のワインガルテンの公式から，曲率線に沿っては

$$\frac{dx^j}{ds}\nabla_j B^\kappa + NB_h{}^\kappa\frac{dx^h}{ds}=0,\qquad \frac{\delta B^\kappa}{\delta s}+N\frac{dx^\kappa}{ds}=0$$

を得る．これは有名な**ロードリーグの公式**の拡張である．

5.12　ガウス，コダッチ，およびリッチの方程式

我々は3章の5.4節でリッチの公式

$$\nabla_\nu\nabla_\mu u^h-\nabla_\mu\nabla_\nu u^h=K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa u^\lambda$$

を証明した．これに対応する V_m における公式はもちろん

$$\nabla_k\nabla_j v^\kappa-\nabla_j\nabla_k v^\kappa=K_{kji}{}^h v^j$$

である．ただし，ここに $K_{kji}{}^h$ は V_m のリーマン・クリストッフェルの曲率テンソルであって

$$K_{kji}{}^h=\frac{\partial\left\{{h\atop ji}\right\}}{\partial x^k}-\frac{\partial\left\{{h\atop ki}\right\}}{\partial x^j}+\left\{{h\atop ka}\right\}\left\{{a\atop ji}\right\}-\left\{{h\atop ja}\right\}\left\{{a\atop ki}\right\}$$

で定義される．それならば V_n, V_m 両方に対する指標をもった量，たとえば $B_i{}^\kappa$ のような量に対するリッチの公式はどうなるであろうか．これを計算してみよう．まず

$$\nabla_j B_i{}^\kappa=\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}+\left\{{\kappa\atop \mu\lambda}\right\}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda-B_h{}^\kappa\left\{{h\atop ji}\right\},$$

したがって

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_j B_i{}^\kappa=&\frac{\partial^2 B_i{}^\kappa}{\partial x^k\partial x^j}+\frac{\partial\left\{{\kappa\atop \lambda\mu}\right\}}{\partial x^\nu}B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_i{}^\lambda+\left\{{\kappa\atop \mu\lambda}\right\}\frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial x^k}B_i{}^\lambda\\&+\left\{{\kappa\atop \mu\lambda}\right\}B_j{}^\mu\frac{\partial B_i{}^\lambda}{\partial x^k}-\frac{\partial B_h{}^\kappa}{\partial x^k}\left\{{h\atop ji}\right\}-B_h{}^\kappa\frac{\partial\left\{{h\atop ji}\right\}}{\partial x^k}\\&+\left\{{\kappa\atop \nu\alpha}\right\}B_k{}^\nu\left(\frac{\partial B_i{}^\alpha}{\partial x^j}+\left\{{\alpha\atop \mu\lambda}\right\}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda-B_h{}^\alpha\left\{{h\atop ji}\right\}\right)\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\partial B_j^{\kappa}}{\partial x^{\alpha}} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_a^{\mu} B_i^{\lambda} - B_h^{\kappa} \left\{ {h \atop aj} \right\}\right)\left\{ {a \atop ki} \right\}$$

$$-\left(\frac{\partial B_i^{\kappa}}{\partial x^{a}} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_a^{\mu} B_i^{\lambda} - B_h^{\kappa} \left\{ {h \atop ai} \right\}\right)\left\{ {a \atop kj} \right\},$$

ゆえに

$$\nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa} = \left(\frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\}\left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\}\right) B_k^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda}$$

$$- B_h^{\kappa}\left(\frac{\partial \left\{ {h \atop ji} \right\}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \left\{ {h \atop ki} \right\}}{\partial x^{j}} + \left\{ {h \atop ka} \right\}\left\{ {a \atop ji} \right\} - \left\{ {h \atop ja} \right\}\left\{ {a \atop ki} \right\}\right),$$

すなわち

$$\nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_k^{\nu} B_j^{\mu} B_i^{\lambda} - B_a^{\kappa} K_{kji}{}^{a}$$

を得る．これが拡張された共変微分に対するリッチの公式である．

さて，この式に $B^h{}_{\kappa}$ を掛けて縮約すれば

$$B^h{}_{\kappa} \nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} - B^h{}_{\kappa} \nabla_j \nabla_k B_i^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_{kji\kappa}^{\nu\mu\lambda h} - K_{kji}{}^{h}$$

を得る．ただし，ここに我々は記号の便宜上

$$B_{kji\kappa}^{\nu\mu\lambda h} = B_k{}^{\nu} B_j{}^{\mu} B_i{}^{\lambda} B_{\kappa}{}^{h}$$

とおいた．ところが

$$B^h{}_{\kappa} \nabla_k \nabla_j B_i^{\kappa} = -(\nabla_k B^h{}_{\kappa})(\nabla_j B_i^{\kappa}) = -H_{ji}{}^{\lambda} H_k{}^h{}_{\lambda}$$

であるから，これを上式に代入して整頓すれば

$$K_{kji}{}^{h} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} B_{kji\kappa}^{\nu\mu\lambda h} + H_k{}^h{}_{\lambda} H_{ji}{}^{\lambda} - H_j{}^h{}_{\lambda} H_{ki}{}^{\lambda}$$

を得る．これが有名な**ガウスの方程式**である．ここに現われる $K_{kji}{}^{h}$ を部分空間の**絶対曲率テンソル**，$H_k{}^h{}_{\lambda} H_{ji}{}^{\lambda} - H_j{}^h{}_{\lambda} H_{ki}{}^{\lambda}$ を**相対曲率テンソル**と呼ぶ．

このガウスの方程式から直ちに次の 2 つの定理が得られる．

定理 15. 局所ユークリッド空間中の全測地曲面はまた局所ユークリッド空間である．

なぜなら $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = 0$, $H_{ji}{}^{\kappa} = 0$ なら，ガウスの方程式から直ちに $K_{kji}{}^{h} = 0$ を得るからである．

定理 16.　定曲率空間中の全臍曲面はまた定曲率空間である．なぜなら

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = k(\delta_\nu^\kappa g_{\mu\lambda} - \delta_\mu^\kappa g_{\nu\lambda}), \qquad H_{ji}{}^{\kappa} = g_{ji} H^\kappa$$

をガウスの方程式に代入すれば

$$K_{kji}{}^h = k(\delta_k^h g_{ji} - \delta_j^h g_{ki}) + H^\lambda H_\lambda (\delta_k^h g_{ji} - \delta_j^h g_{ki})$$
$$= (k + H^\lambda H_\lambda)(\delta_k^h g_{ji} - \delta_j^h g_{ki})$$

を得るからである．この場合 k および $k + H^\lambda H_\lambda$ はシューアの定理によって定数となるのであるから $H^\lambda H_\lambda$ もまた定数となる．すなわち

定理 17.　定曲率空間中の全臍曲面の平均曲率は一定である．

次に法線 $B_P{}^\kappa$ に対して拡張されたリッチの公式を計算してみよう．まず

$$\nabla_j B_P{}^\kappa = \frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu B_P{}^\lambda,$$

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa = \frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial x^k} B_P{}^\lambda + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu \frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k}$$
$$+ \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} B_k{}^\nu \left(\frac{\partial B_P{}^\alpha}{\partial x^j} + \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu B_P{}^\lambda \right) - \left(\frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^h} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_h{}^\mu B_P{}^\lambda \right) \left\{ {h \atop kj} \right\}$$

したがって

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa - \nabla_j \nabla_k B_P{}^\kappa = \left(\frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \nu\lambda} \right\}}{\partial x^\mu} + \left\{ {\kappa \atop \nu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\kappa \atop \mu\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \nu\lambda} \right\} \right) B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda,$$

すなわち

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa - \nabla_j \nabla_k B_P{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda$$

を得る．これが $B_P{}^\kappa$ に対する拡張されたリッチの公式である．

ところがワインガルテンの公式によれば

$$\nabla_j B_P{}^\kappa = -H_j{}^i{}_P B_i{}^\kappa + L_{jPQ} B_Q{}^\kappa$$

この公式をさらに部分空間に沿って x^h で共変微分すれば

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa = -(\nabla_k H_j{}^i{}_P) B_i{}^\kappa - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} B_Q{}^\kappa + (\nabla_k L_{jPQ}) B_Q{}^\kappa + L_{jPQ} (\nabla_k B_Q{}^\kappa)$$

となる．この式にさらにワインガルテンの公式

$$\nabla_k B_Q{}^\kappa = -H_k{}^i{}_Q B_i{}^\kappa + L_{kQR} B_R{}^\kappa$$

を代入すれば，我々は

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa = -(\nabla_k H_j{}^i{}_P) B_i{}^\kappa - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} B_Q{}^k + (\nabla_k L_{jPQ}) B_Q{}^\kappa$$
$$+ L_{jPQ}(-H_k{}^i{}_Q B_i{}^\kappa + L_{kQR} B_R{}^\kappa)$$

を得る．この式を拡張されたリッチの公式

$$\nabla_k \nabla_j B_P{}^\kappa - \nabla_j \nabla_k B_P{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda$$

に代入すれば，我々は

$$-(\nabla_k H_j{}^i{}_P - \nabla_j H_k{}^i{}_P) B_i{}^\kappa - (H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - H_k{}^i{}_P H_{jiQ}) B_Q{}^\kappa$$
$$+ (\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ}) B_Q{}^\kappa - (L_{jPQ} H_k{}^i{}_Q - L_{kPQ} H_j{}^i{}_Q) B_i{}^\kappa$$
$$+ (L_{jPQ} L_{kQR} - L_{kPQ} L_{jQR}) B_R{}^\kappa = K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda$$

を得る．

この式に $B^h{}_\kappa$ を掛けて κ で縮約すれば

$$\nabla_k H_j{}^h{}_P - \nabla_j H_k{}^h{}_P - L_{kPQ} H_j{}^h{}_P + L_{jPQ} H_k{}^h{}_Q = -K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa B^{\nu\mu\lambda h}_{kjP\kappa}$$

$B_{R\kappa}$ を掛けて κ で縮約すれば

$$\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ} + H_k{}^i{}_P H_{jiQ} - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - L_{kPR} L_{jRQ} + L_{jPR} L_{kRQ}$$
$$= K_{\nu\mu\lambda\kappa} B^{\nu\mu\lambda\kappa}_{kjPQ}$$

を得る．ただし我々は簡単のために

$$B^{\nu\mu\lambda h}_{kjP\kappa} = B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda B^h{}_\kappa, \qquad B^{\nu\mu\lambda\kappa}_{kjPQ} = B_k{}^\nu B_j{}^\mu B_P{}^\lambda B_Q{}^\kappa$$

とおいた．これらの2つの方程式はそれぞれ，コダッチの方程式およびリッチの方程式と呼ばれている方程式である．

5.13 リーマンの曲率の幾何学的意味

我々は3章の3.7節において，リーマン空間中の与えられた1点に2つのベクトル u^κ および v^κ があるとき，これから1つのスカラー

$$k = \frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa} u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\kappa} g_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda}) u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}$$

を作り，これを2方向 u^κ および v^κ に対するリーマンの曲率と呼んだ．しかもその際，この k が与えられた点を通り，与えられた2方向 u^κ, v^κ の定める2次元平面に接するすべての測地線の作る2次元部分空間 V_2 の，この点におけるガウスの曲率であることを証明なしに述べた．本節ではこの事実を実際計算によって確かめよう．

まず，そのために我々は，V_n の座標系としてリーマンの標準座標 (x^κ) をとり，与えられた点を原点に選ぶ．

そうすると，この点すなわち原点を通るすべての測地線は

$$x^\kappa = \left(\frac{dx^\kappa}{ds}\right)_0 s$$

という形に書かれる．したがって原点から出る2つのベクトル u^κ および v^κ の定める2次元平面に接するすべての測地線の作る2次元曲面の方程式は

$$x^\kappa = (u^\kappa \alpha + v^\kappa \beta) s$$

という形に書かれる．ここに α および β は任意の定数である．したがって αs および βs を曲面上の曲線座標 $(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}})$ にとれば，曲面の方程式は

$$x^\kappa = u^\kappa x^{\dot{1}} + v^\kappa x^{\dot{2}}$$

となる．したがって

$$B_i{}^\kappa = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^i} \qquad (i, j, \cdots = \dot{1}, \dot{2})$$

とおけば

$$B_{\dot{1}}{}^\kappa = u^\kappa, \qquad B_{\dot{2}}{}^\kappa = v^\kappa$$

となる．したがって曲面 V_2 上の第1基本テンソル

$$g_{ji} = B_j{}^\mu B_i{}^\lambda g_{\mu\lambda}$$

を計算すれば

$$g_{\dot{1}\dot{1}} = g_{\mu\lambda} u^\mu u^\lambda, \qquad g_{\dot{1}\dot{2}} = g_{\mu\lambda} u^\mu v^\lambda, \qquad g_{\dot{2}\dot{2}} = g_{\mu\lambda} v^\mu v^\lambda$$

となる．次にオイラー・スカウテンのテンソル

$$H_{ji}{}^\kappa = \nabla_j B_i{}^\kappa = \frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} + \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop ji} \right\}$$

の標準座標の原点における値を考えれば，$B_i{}^\kappa$ は定数であるから

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j}=0$$

また $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}=0$ であるから

$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}B_j{}^\mu B_i{}^\lambda=0,$$

したがって

$$H_{ji}{}^\kappa=-B_h{}^\kappa\{{}^{h}_{ji}\}.$$

ところが $H_{ji}{}^\kappa$ は V_2 に垂直であり，$-B_h{}^\kappa\{{}^{h}_{ji}\}$ は V_2 に接しているのであるから，これらが等しいというのであれば，いずれも 0 とならなければならない．したがって

$$H_{ji}{}^\kappa=0, \qquad \{{}^{h}_{ji}\}=0$$

が標準座標系 (x^κ) の原点で成立しなければならない．

しかるに V_n の曲率テンソルを $K_{\nu\mu\lambda\kappa}$, V_2 の曲率テンソルを K_{kjih} とすれば，ガウスの方程式によって

$$K_{kjih}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}B^{\nu\mu\lambda\kappa}_{kjih}+H_{kh}{}^\lambda H_{ji\lambda}-H_{jh}{}^\lambda H_{ki\lambda}$$

であるから，これに上の関係を代入すれば

$$K_{kjih}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}B^{\nu\mu\lambda\lambda}_{kjih}$$

を得る．ところが，K_{kjih} の指標 k,j,i,h はいずれも $\dot{1},\dot{2}$ という値しかとらないのであるから

$$K_{kjih}=-K_{jkih}, \qquad K_{kjih}=-K_{kjhi}$$

という恒等式からわかるように，K_{kjih} のうちで独立なのは $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$ だけである．したがって，ガウスの方程式から

$$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}=K_{\nu\mu\lambda\kappa},B^{\nu\mu\lambda\kappa}_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$$

すなわち

$$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa$$

を得る．

さて，ここに現われた $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$ は最早，V_2 の座標変換

$$\bar{x}^h = \bar{x}^h(x^{\dot{1}}, x^{\dot{2}})$$

に対してテンソルではない．その変換法則を求めてみよう．まず K_{kjih} のテンソル性から

$$\bar{K}_{kjih} = K_{dcba}\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^h},$$

したがって

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} &= K_{abcd}\frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} \\
&= K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} + K_{\dot{1}\dot{2}\dot{2}\dot{1}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} \\
&\quad + K_{\dot{2}\dot{1}\dot{1}\dot{2}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} + K_{\dot{2}\dot{1}\dot{2}\dot{1}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} \\
&= K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}\left(\frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} - \frac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}}\frac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}}\right)^2
\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}} & \dfrac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{1}}} \\[2ex] \dfrac{\partial x^{\dot{1}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} & \dfrac{\partial x^{\dot{2}}}{\partial \bar{x}^{\dot{2}}} \end{vmatrix}$$

とおけば，$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$ の換変式は

$$\bar{K}_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = \Delta^2 K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}$$

となる．ところが

$$g' = \begin{vmatrix} g_{\dot{1}\dot{1}} & g_{\dot{1}\dot{2}} \\ g_{\dot{2}\dot{1}} & g_{\dot{2}\dot{2}} \end{vmatrix}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
g' &= g_{\dot{1}\dot{1}}g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}}g_{\dot{2}\dot{1}} \\
&= g_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda g_{\mu\kappa}v^\mu v^\kappa - g_{\nu\kappa}u^\nu v^\kappa g_{\mu\lambda}v^\mu u^\lambda \\
&= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa
\end{aligned}$$

であって，g' の変換式は

$$\bar{g}' = \Delta^2 g'$$

である．

したがって

$$\frac{K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}}{g'} = \frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa} u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}) u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}$$

は座標の変換に対して不変である．

まず，ここに現われる $K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}/g'$ を計算しよう．

3 章の 5.5 節で証明した公式

$$K_{kjih} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k g x^h} - \frac{\partial^2 g_{kh}}{\partial x^j \partial x^i}\right)$$
$$- \left\{{b \atop ji}\right\}\left\{{a \atop kh}\right\} g_{ba} - \left\{{b \atop ki}\right\}\left\{{a \atop jh}\right\}) g_{ba}$$

において $\left\{{a \atop ji}\right\}$ などは全部 0 であるから

$$K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}} \partial x^{\dot{2}}} + \frac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{1}}} - \frac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{2}}} - \frac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{2}} \partial x^{\dot{1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}} \partial x^{\dot{2}}} - \frac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{2}}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{1}}}$$

となる．したがって

$$\frac{K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}}{g'} = \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}} \partial x^{\dot{2}}} - \dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{2}}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{1}}}}{g_{\dot{1}\dot{1}} g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}} g_{\dot{2}\dot{1}}}$$

となる．

ところが線素 ds が

$$ds^2 = g_{\dot{1}\dot{1}} dx^{\dot{1}} dx^{\dot{1}} + 2 g_{\dot{1}\dot{2}} dx^{\dot{1}} dx^{\dot{2}} + g_{\dot{2}\dot{2}} dx^{\dot{2}} dx^{\dot{2}}$$

で与えられる 2 次元曲面のガウスの曲率を k とすれば

$$(g_{\dot{1}\dot{1}} g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}} g_{\dot{2}\dot{1}})^2 k$$
$$= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}} \partial x^{\dot{2}}} + \dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{2}}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}} \partial x^{\dot{1}}}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{1}}}, & \dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}} \\ \dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}}, & g_{\dot{1}\dot{1}}, & g_{\dot{1}\dot{2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}}, & g_{\dot{2}\dot{1}}, & g_{\dot{2}\dot{2}} \end{vmatrix}$$

$$
-\begin{vmatrix}
0\ , & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}}, & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}} \\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}}, & g_{\dot{1}\dot{1}}\ , & g_{\dot{1}\dot{2}} \\
\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}}, & g_{\dot{2}\dot{1}}\ , & g_{\dot{2}\dot{2}}
\end{vmatrix}
$$

である．[たとえば窪田忠彦著：微分幾何学（岩波書店）p. 124 参照]

ところが我々の場合，原点においては $\left\{ {k \atop ji} \right\} = 0$，したがって $\partial g_{ji}/\partial x^h = 0$ であるから，上式は簡単になって

$$
\begin{aligned}
&(g_{\dot{1}\dot{1}} g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}} g_{\dot{2}\dot{1}})^2 k \\
&\quad = \left(-\frac{1}{2}\frac{g^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}\partial x^{\dot{2}}} + \frac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}\partial x^{\dot{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}\partial x^{\dot{1}}} \right)(g_{\dot{1}\dot{1}} g_{\dot{1}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}} g_{\dot{2}\dot{1}}),
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
k = -\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{1}}}{\partial x^{\dot{2}}\partial x^{\dot{2}}} - \dfrac{\partial^2 g_{\dot{1}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}\partial x^{\dot{2}}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g_{\dot{2}\dot{2}}}{\partial x^{\dot{1}}\partial x^{\dot{1}}}}{g_{\dot{1}\dot{1}} g_{\dot{2}\dot{2}} - g_{\dot{1}\dot{2}} g_{\dot{2}\dot{1}}}
$$

となる．これで

$$
k = -\frac{K_{\dot{1}\dot{2}\dot{1}\dot{2}}}{g'} = -\frac{K_{\nu\mu\lambda\kappa} u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa}) u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}
$$

であることが証明された．

6 章

平たんな空間中の部分空間

6.1 リーマン空間の類数

リーマン空間 V_n において，その基本2次微分形式

$$ds^2 = g_{\mu\lambda} dx^\mu dx^\lambda$$

の係数 $g_{\mu\lambda}$ を，全部定数とするような座標系 (x^κ) が存在するならば，我々は，V_n を平たんなリーマン空間と呼ぶことはすでにのべた．また，このような座標系 (x^κ) が存在するために必要にしてかつ十分な条件は，リーマン・クリストッフェルの曲率テンソルが0，すなわち

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$$

であることもすでに学んだ．もし正値2次微分形式

$$ds^2 = g_{\mu\lambda} dx^\mu dx^\lambda$$

の係数 $g_{\mu\lambda}$ が全部定数であるならば，適当な1次変換

$$x^\kappa = \gamma^\kappa_a y^a$$

によって，これを

$$ds^2 = dy^1 dy^1 + dy^2 dy^2 + \cdots\cdots + dy^n dy^n$$

という二乗の和の形に直し得ることは，代数学においてよく知られている．このような ds^2 をもった空間は局所的には実はユークリッド空間であって，ここに現われる (y^a) は1つの直交座標系である．

したがって $K_{\nu\mu\lambda}{}^\kappa = 0$ というリーマン空間は局所的には実はユークリッド空間であって，基本微分2次方程式の係数を全部定数とするような座標系

は，実は直交座標系から定数係数の1次変換によって得られるものである．ユークリッド空間におけるこのような座標系を我々は**直線座標系**と呼ぶ．

さて，いま n 次元のユークリッド空間 E_n 中に1つの直交座標系 (y^κ) をとって，E_n 中に1つの m 次元の部分空間を方程式

$$y^\kappa = y^\kappa(x^1, x^2, \cdots, y^m)$$

によって定義したものとすれば，この部分空間に属する非常に近い2点間の距離を与える公式は

$$ds^2 = g_{ji}\,dx^j dx^i,$$

ただし

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i} = g_{ji}$$

となるから，この部分空間は1つの m 次元のリーマン空間 V_m である．

逆に基本2次微分形式が

$$ds^2 = g_{ji}\,dx^j dx^i$$

で与えられる1つの m 次元のリーマン空間が与えられた場合に，これを1つの部分空間とする適当な次元 n をもったユークリッド空間 E_n が果たして存在するであろうか．

そのために必要にしてかつ十分な条件は $\frac{1}{2}m(m+1)$ 個の連立偏微分方程式

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i} = g_{ji}$$

が n 個の独立な解

$$y^\kappa = y^\kappa(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$

をもっていることである．ところが連立偏微分方程式の数は $\frac{1}{2}m(m+1)$ であるから，もし $n=\frac{1}{2}m(m+1)$ ならば，偏微分方程式論における定理によって，上の連立偏微分方程式は一般に $n=\frac{1}{2}m(m+1)$ 個の独立な解をもっているわけである．したがって **m 次元のリーマン空間は一般に $\frac{1}{2}m(m+1)$ 次元のユークリッド空間の部分空間とみなし得るわけである．**

しかしながら，m 次元のリーマン空間 V_m が，$\frac{1}{2}m(m+1)$ よりも小さな次元をもったユークリッド空間 E_n の部分空間とみなし得ることももちろんあるわけである．この場合，このような条件を満足する最小の数を n とするとき，$n-m=p$ をリーマン空間 V_m の**類数**と呼ぶ．

6.2　類数 p のリーマン空間 V_m

リーマン空間 V_m の類数を p とすれば，V_m は直交座標系 (y^κ) に関して表わされた $m+p$ 次元のユークリッド空間 E_{m+p} 中の部分空間

$$y^\kappa = y^\kappa(x^h) \quad (\kappa, \lambda, \mu, \nu, \cdots = 1, 2, 3, \cdots, m+p;\ h, i, j, k, \cdots = \dot{1}, \dot{2}, \cdots, \dot{m})$$

とみなすことができる．

この場合 V_m の第1基本テンソル g_{ji} は

$$\sum_{\lambda=1}^{m+p} \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i} = g_{ji}$$

で表わされる．ここにおいて，両方とも上にある指標に関しても総和に関する約束を採用するものとすれば，上式は

$$\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i} = g_{ji}$$

と書かれる．また，前章におけると同様

$$\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^i} = B_i{}^\kappa$$

という記法を採用すれば，上式はさらに簡単に

$$B_j{}^\kappa B_i{}^\kappa = g_{ji}$$

と書かかれる．

次に第2基本テンソル $H_{ji}{}^\kappa$ は，E_{m+p} におけるクリストッフェルの記号 $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}$ は全部0なのであるから，

$$H_{ji}{}^\kappa = \frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} - B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop ji} \right\}$$

で定義される．

ここに現われる $H_{ji}{}^{\kappa}$ は前章におけると同様にして，E_{m+p} 中の部分空間 V_m に垂直であることが証明されるから，V_m に垂直で，かつ互いに直交する p 個の単位ベクトルを $B_P{}^{\kappa}$ $(P, Q, R, \cdots = \dot{m}+\dot{1}, \dot{m}+\dot{2}, \cdots, \dot{m}+\dot{p})$ とすれば，すなわち $B_P{}^{\kappa}$ を

$$B_j{}^{\lambda} B_P{}^{\lambda} = 0, \qquad B_P{}^{\lambda} B_R{}^{\lambda} = \delta_{PR}$$

を満足する E_{m+p} のベクトルとすれば，$H_{ji}{}^{\kappa}$ は

$$H_{ji}{}^{\kappa} = H_{jiP} B_P{}^{\kappa}$$

と書き表わされる．

次に

$$L_{jPQ} = (\nabla_j B_P{}^{\lambda}) B_Q{}^{\lambda},$$

すなわち

$$L_{jPQ} = \frac{\partial B_P{}^{\lambda}}{\partial x^j} B_Q{}^{\lambda}$$

で $L_{jQP}(= -L_{jQP})$ を定義すれば，この場合のワインガルテンの公式は

$$\frac{\partial B_P{}^{\lambda}}{\partial x^j} = -H_j{}^i{}_P B_i{}^{\lambda} + L_{jPQ} B_Q{}^{\lambda}$$

となる．

なお，この場合，ガウス，コダッチおよびリッチの方程式は，$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = 0$ によって，それぞれ

$$K_{kji}{}^h = H_k{}^h{}_{\lambda} H_{ji}{}^{\lambda} - H_j{}^h{}_{\lambda} H_{ki}{}^{\lambda}$$

$$\nabla_k H_j{}^h{}_P - \nabla_j H_k{}^h{}_P - L_{kPQ} H_j{}^h{}_Q + L_{jPQ} H_k{}^h{}_Q = 0,$$

$$\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ} + H_k{}^i{}_P H_{jiQ} - H_j{}^i{}_P H_{kiQ} - L_{kPR} L_{jRQ} + L_{jPR} L_{kRQ} = 0$$

となる．

6.3　基本方程式および基本定理

本節では前節のそれと逆の関係にある次の問題を考えよう．すなわち g_{ji} $(= g_{ij})$，$H_{jiP}(= H_{ijP})$ および $L_{jPQ}(= -L_{jQP})$ が m 個の変数 $(x^1, x^2, \cdots,$

$x^{\dot m}$) の関数として与えられた場合に，これから逆に，これらの関数をそれぞれ第1，第2，第3基本量とするような E_{m+p} 中の V_m を決定し得るかどうかという問題を考えよう．

さて，V_m の決定という問題は

$$y^\kappa = y^\kappa(x^{\dot 1}, x^{\dot 2}, \cdots, x^{\dot m})$$

という $m+p$ 個の関数の決定という問題である．この y^κ を決定するには

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \frac{\partial B_j{}^\kappa}{\partial x^i}$$

を満足する関数

$$\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^i} = B_i{}^\kappa$$

が決定されればよい．さて，この $B_i{}^\kappa$ は

$$B_j{}^\kappa B_i{}^\kappa = g_{ji}$$

および

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop ji} \right\} + H_{jiP} B_P{}^\kappa$$

を満足していなければならない．これを満足する $B_i{}^\kappa$ が

$$\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \frac{\partial B_j{}^\kappa}{\partial x^i}$$

を満足していることは，$\left\{ {h \atop ji} \right\}$ および H_{jiP} の j および i に関する対称性から明らかであろう．さて，上の偏微分方程式に現われる $\left\{ {h \atop ji} \right\}$ および H_{jiP} はいずれも (x^h) の既知関数であるが，最後の $B_P{}^\lambda$ は

$$B_i{}^\lambda B_P{}^\lambda = 0, \qquad B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}$$

および

$$\frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} = -H_j{}^i{}_P B_i{}^\kappa + L_{jPQ} B_Q{}^\kappa$$

を満足しなければならない．

したがって，結局 V_m を決定するには

$$\begin{cases} B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda = g_{ji}, \quad B_j{}^\lambda B_P{}^\lambda = 0, \quad B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}, \\ \dfrac{\partial y^\kappa}{\partial x^i} = B_i{}^\kappa, \\ \dfrac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop ji} \right\} + H_{jiP} B_P{}^\kappa, \\ \dfrac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} = -B_i{}^\kappa H_j{}^i{}_P + L_{jPQ} B_Q{}^\kappa \end{cases}$$

という連立偏微分方程式を解かねばならないことがわかる．この連立偏微分方程式のことを我々は V_m の基本方程式と呼ぶ．いま，その完全積分可能条件を求めてみよう．

まず最初の3つの方程式から

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k}(B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}) \\ &= \frac{\partial B_j{}^\lambda}{\partial x^k} B_i{}^\lambda + B_j{}^\lambda \frac{\partial B_i{}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} \\ &= (B_h{}^\lambda \left\{ {h \atop kj} \right\} + H_{kjP} B_P{}^\lambda) B_i{}^\lambda + B_j{}^\lambda (B_h{}^\lambda \left\{ {h \atop ki} \right\} + H_{kiP} B_P{}^\lambda) - (\left\{ {h \atop kj} \right\} g_{hi} + \left\{ {h \atop ki} \right\} g_{jh}) \\ &= (B_h{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{hi}) \left\{ {h \atop kj} \right\} + (B_j{}^\lambda B_h{}^\lambda - g_{jh}) \left\{ {h \atop ki} \right\} + H_{kjP} B_P{}^\lambda B_i{}^\lambda + H_{kiP} B_P{}^\lambda B_j{}^\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k}(B_j{}^\lambda B_P{}^\lambda) \\ &= \frac{\partial B_j{}^\lambda}{\partial x^k} B_P{}^\lambda + B_j{}^\lambda \frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k} \\ &= (B_h{}^\lambda \left\{ {h \atop kj} \right\} + H_{kjQ} B_Q{}^\lambda) B_P{}^\lambda + B_j{}^\lambda (-H_k{}^i{}_P B_i{}^\lambda + L_{kPQ} B_Q{}^\lambda) \\ &= B_h{}^\lambda B_P{}^\lambda \left\{ {h \atop kj} \right\} + (B_Q{}^\lambda B_P{}^\lambda - \delta_{QP}) H_{kjQ} - (B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}) H_k{}^i{}_P + B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda L_{kPQ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k}(B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ}) \\ &= \frac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k} B_Q{}^\lambda + B_P{}^\lambda \frac{\partial B_Q{}^\lambda}{\partial x^k} \\ &= (-H_k{}^i{}_P B_i{}^\lambda + L_{kPR} B_R{}^\lambda) B_Q{}^\lambda + B_P{}^\lambda (-H_k{}^i{}_Q B_i{}^\lambda + L_{kQR} B_R{}^\lambda) \\ &= -B_i{}^\lambda B_Q{}^\lambda H_k{}^i{}_P - B_P{}^\lambda B_i{}^\lambda H_k{}^i{}_Q + (B_R{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{RQ}) L_{kPR} \\ &\qquad + (B_P{}^\lambda B_R{}^\lambda - \delta_{PR}) L_{kQR} \end{aligned}$$

を得る．これらの式は $B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}$，$B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda$，$B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ}$ の第1次微分がそれぞれ $B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji}$，$B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda$，$B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ}$ の1次斉次式で書き表わされることを示している．これと全く同様にして $B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{jk}$，$B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda$，$B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ}$ のさらに高次の微分は，これらの量およびこれらの量の低次の微分の1次関数で表わし得ることが容易に示される．したがって連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \quad B_h{}^\kappa\left\{{h \atop ji}\right\} + H_{jiP}B_P{}^\kappa, \\ \dfrac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^j} = -B_i{}^\kappa H_j{}^i{}_P + L_{jPQ}B_Q{}^\kappa \end{cases}$$

の解を，初期条件

$$B_j{}^\lambda B_i{}^\lambda - g_{ji} = 0, \qquad B_j{}^\lambda B_Q{}^\lambda = 0, \qquad B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda - \delta_{PQ} = 0$$

を満足するようにとれば，これらの関係式は上記の連立偏微分方程式の解によって，x^h のすべての値に対して満足されている．

次に上の連立偏分方程式の完全積分可能条件を求めよう．

まず前者の方程式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_i{}^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} &= \frac{\partial B_h{}^\kappa}{\partial x^k}\left\{{h \atop ji}\right\} + B_h{}^\kappa \frac{\partial\left\{{h \atop ji}\right\}}{\partial x^k} + \frac{\partial H_{jkP}}{\partial x^k}B_P{}^\kappa + H_{jiP}\frac{\partial B_P{}^\kappa}{\partial x^k} \\ &= \left(B_a{}^\kappa\left\{{a \atop kh}\right\} + H_{khP}B_P{}^\kappa\right)\left\{{h \atop ji}\right\} + B_h{}^\kappa\frac{\partial\left\{{h \atop ji}\right\}}{\partial x^k} + \frac{\partial H_{jiP}}{\partial x^k}B_P{}^\kappa \\ &\qquad + H_{jiP}\left(-B_h{}^\kappa H_k{}^h{}_P + L_{kPQ}B_Q{}^\kappa\right), \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 B_i{}^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 B_i{}^\kappa}{\partial x^j \partial x^k} \\ &= B_h{}^\kappa\left(\frac{\partial\left\{{h \atop ji}\right\}}{\partial x^k} - \frac{\partial\left\{{h \atop ki}\right\}}{\partial x^j} + \left\{{h \atop ka}\right\}\left\{{a \atop ji}\right\} - \left\{{h \atop ja}\right\}\left\{{a \atop ki}\right\}\right) \\ &\qquad\qquad - B_h{}^\kappa\left(H_{jiP}H_k{}^h{}_P - H_{kiP}H_j{}^h{}_P\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial H_{jiP}}{\partial x^k} - \frac{\partial H_{kiP}}{\partial x^j} + H_{khP}\left\{{h \atop ji}\right\} - H_{jhP}\left\{{h \atop ki}\right\}\right)B_P{}^\kappa \\ &\qquad\qquad + \left(H_{jiP}L_{kPQ} - H_{kiP}L_{jPQ}\right)B_Q{}^\kappa, \end{aligned}$$

すなわち

$$0 = B_h{}^\kappa K_{kji}{}^h - B_h{}^\kappa(H_{jiP}H_k{}^h{}_P - H_{kiP}H_j{}^h{}_P)$$
$$+ (\nabla_k H_{jiP} - \nabla_j H_{kiP})B_P{}^\kappa + (H_{jiP}L_{kPQ} - H_{kiP}L_{jPQ})B_Q{}^\kappa$$

を得る．この式が成立するために必要にしてかつ十分な条件は，これにそれぞれ $B_\kappa{}^a(= g^{ai}g_{\lambda\kappa}B_i{}^\lambda)$ および $B_R{}^\kappa$ を縮約した式が成立することである．

まず $B^a{}_\kappa$を掛けて κ で縮約を行なえば

$$0 = K_{kji}{}^a - H_{jiP}H_k{}^a{}_P + H_{kiP}H_j{}^a{}_P.$$

を得る．これはガウスの方程式にほかならない．次に B_R^κ を掛けて κ で縮約を行なえば

$$\nabla_k H_{jiR} - \nabla_j H_{kiR} + H_{jiP}L_{kPR} - H_{kiP}L_{jPR} = 0$$

を得る．これはコダッチの式にほかならない．

次に連立偏微分方程式の最後の式から

$$\frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^k \partial x^j} = -\frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^k}H_j{}^i{}_P - B_i{}^\kappa\frac{\partial H_j{}^i{}_P}{\partial x^k} + \frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k}B_Q{}^\kappa + L_{jPQ}\frac{\partial B_Q{}^\kappa}{\partial x^k}$$
$$= -\left(B_h{}^\kappa\left\{{h \atop ki}\right\} + H_{kiQ}B_Q{}^\kappa\right)H_j{}^i{}_P - B_i{}^\kappa\frac{\partial H_j{}^i{}_P}{\partial x^k} + \frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k}B_Q{}^\kappa$$
$$+ L_{jPQ}(-B_i{}^\kappa H_k{}^i{}_Q + L_{kQR}B_R{}^\kappa)$$

したがって

$$0 = \frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 B_P{}^\kappa}{\partial x^k \partial x^j}$$
$$= -B_h{}^\kappa\left(\frac{\partial H_j{}^h{}_P}{\partial x^k} - \frac{\partial H_k{}^h{}_P}{\partial x^j} + \left\{{h \atop ki}\right\}H_j{}^i{}_P - \left\{{h \atop ji}\right\}H_k{}^i{}_P\right)$$
$$- B_h{}^\kappa(L_{jPQ}H_k{}^h{}_Q - L_{kPQ}H_j{}^h{}_Q) + \left(\frac{\partial L_{jPQ}}{\partial x^k} - \frac{\partial L_{kPQ}}{\partial x^j}\right)B_Q{}^\kappa$$
$$- (H_{kiQ}H_j{}^i{}_P - H_{jiQ}H_k{}^i{}_P)B_Q{}^\kappa + (L_{jPQ}L_{kQR} - L_{kPQ}L_{jQR})B_R{}^\kappa,$$

すなわち

$$0 = -B_h{}^\kappa(\nabla_k H_j{}^h{}_P - \nabla_j H_k{}^h{}_P) - B_h{}^\kappa(L_{jPQ}H_k{}^h{}_Q - L_{kQR}H_j{}^h{}_Q)$$

$$- (H_{kiQ} H_j{}^i{}_P - H_{jiQ} H_k{}^i{}_P) B_Q{}^\kappa + (\nabla_k L_{jPQ} - \nabla_j L_{kPQ}) B_Q{}^\kappa$$
$$+ (L_{jPQ} L_{kQR} - L_{kPQ} L_{jQR}) B_R{}^\kappa$$

を得る．この式が成立するための必要十分条件は，これにそれぞれ $B^a{}_\kappa$ および $B_S{}^\kappa$ を掛けて κ で縮約した式が成立することである．

まず $B^a{}_\kappa$ を縮約すれば

$$- \nabla_k H_j{}^a{}_P + \nabla_j H_k{}^a{}_P - L_{jPQ} H_k{}^a{}_Q + L_{kPQ} H_j{}^a{}_Q = 0$$

を得る．これはコダッチの方程式にほかならない．次に $B_S{}^\kappa$ を縮約すれば

$$\nabla_k L_{jPS} - \nabla_j L_{kPS} - H_{kiS} H_j{}^i{}_P + H_{jiS} H_k{}^i{}_P$$
$$+ L_{iPQ} L_{kQS} - L_{kPQ} L_{jQS} = 0$$

を得る．これはリッチの方程式にほかならない．

したがって，連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} = \quad B_h{}^\kappa \left\{ {h \atop ji} \right\} + H_{jiP} B_P{}^\kappa, \\ \dfrac{\partial B_P{}^\lambda}{\partial x^k} = - B_i{}^\kappa H_k{}^i{}_P + L_{PQk} B_Q{}^\kappa \end{cases}$$

の積分可能条件は，ガウス，コダッチおよびリッチの方程式である．したがって，次の定理を得る．

n 次元ユークリッド空間中に $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ の関数 $g_{jk}(=g_{kj})$ $H_{jkP}(=H_{kjP})$ および $L_{kPQ}(=-L_{kQP})$ が，ガウス，コダッチおよびリッチの方程式を満足するように与えられているならば，これらをそれぞれ第1，第2，第3基本量とする m 次元の部分空間 V_m が必ず存在する．

この定理を我々は基本定理と呼ぶ．

さて，最後にあげた聯立偏微分方程式における未知関数の数は

$B_j{}^\lambda$ が nm 個，　　すなわち　$(m+p)m$ 個，

$B_Q{}^\lambda$ が $n(n-m)$ 個，　すなわち　$(m+p)p$ 個，

都合 $(m+p)^2$ である．しかるに，これらの間には

$$B_j{}^\lambda B_k{}^\lambda = g_{jk}, \qquad \frac{1}{2}m(m+1)\text{ 個},$$

$$B_j{}^\lambda B_q{}^\lambda = 0, \qquad mp\text{ 個},$$

$$B_P{}^\lambda B_Q{}^\lambda = \delta_{PQ}, \qquad \frac{1}{2}p(p+1)\text{ 個},$$

合計

$$\frac{1}{2}m(m+1)+mp+\frac{1}{2}p(p+1)=\frac{1}{2}(m+p)(m+p+1)\text{ 個}$$

の条件があるのであるから，上の連立偏微分方程式の解の含み得る任意定数の数は

$$(m+p)^2-\frac{1}{2}(m+p)(m+p+1)=\frac{1}{2}(m+p)(m+p-1)\text{ 個}$$

である．

しかるに $B_j{}^\lambda$ が求まれば，次に

$$\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}=B_j{}^\lambda$$

から y^λ を求めるのであるが，この積分において任意定数が $n=m+p$ 個入って来る．したがって結局 V_m を定めるために入って来る任意定数の総数は

$$\frac{1}{2}(m+p)(m+p-1)+(m+p)=\frac{1}{2}(m+p)(m+p+1)=\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 個}$$

である．この任意定数の個数は次のように解釈して得られる．

もし y^λ および $B_P{}^\lambda$ が与えられた偏微分方程式の1つの解であれば

$$a_\mu^\lambda a_\nu^\lambda=\delta_{\mu\nu}$$

を満足する a_μ^λ を用いて作った

$$\begin{cases}\bar{y}^\lambda = a_\mu^\lambda y^\mu + b^\lambda\\ \bar{B}_P{}^\lambda = a_\mu^\lambda B_P{}^\mu\end{cases}$$

もまた与えられた連立偏微分方程式の解であることは明らかである．ここに現われる独立な定数 a_μ^λ の数は n^2 個の a_μ^λ に対して $\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の条件があるのであるから $n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n-1)$, b^λ の数は n, 都合

$$\frac{1}{2}n(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

であるから，上式が与えられた連立偏微分方程式の一般解を与える式である．しかるに上式はユークリッド空間における回転と平行移動を組み合わせた運動を与える式である．したがって

基本定理にいう V_m はユークリッド空間における運動を除いて定まるものである，

ということがわかる．

6.4 レビ・チビタの平行性の幾何学的意味

本節では，レビ・チビタの平行性の幾何学的意味を，平たんな空間 E_n 中の $n-1$ 次元の部分空間 V_{n-1} 上の平行性を例にとって明らかにしてみよう．

まず平たんな空間 E_n，すなわち n 次元のユークリッド空間 E_n 中に，1つの直交座標系 (y^κ) をとって，部分空間 V_{n-1} の方程式を

$$y^\kappa = y^\kappa(x^h)$$

とおけば，部分空間 V_{n-1} 上の非常に近い2点 (x^h) および $(x^h + dx^h)$ 間の距離 ds は

$$ds^2 = g_{ji}\,dx^j dx^i \quad \text{ただし} \quad g_{ji} = \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^j}\frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i}$$

で与えられる．

いま部分空間 V_{n-1} が延び縮みしない，しかしながら自由に変形し得る物質からできているものと想像してみよう．この場合には，V_{n-1} という部分空間を如何に変形してみたところで，この部分空間上の2点間の距離は変わらない．たとえば，この部分空間上に2点 P, Q をとり，これを部分空間の測地線で結んだものと考えれば，部分空間を如何に変形させたとしても，この変形によっては延び縮みは起こらないのであるから，2点 P, Q 間のこれを結ぶ測地線に沿っての距離は不変である．しかも最初の測地線は，いかに変形された部分空間上においてもなお測地線である．たとえば1枚の平面上に直

線（測地線）をえがいておいて，これをまるめて円柱を作ったとしても，この線は円柱上においてもまた測地線である．このように部分空間 V_{n-1} の性質のうちで，延び縮みを伴わない変形によって不変な性質を，部分空間に固有な性質と呼ぶことにする．

さて，延び縮みを伴わない部分空間の変形によって，部分空間上の2点間の距離は不変なのであるから，このような変形によって，部分空間の

$$ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$$

は変化を受けない．したがって，ここに現われる g_{ji} のみから導かれる部分空間の性質は，いわゆる部分空間の固有性質である．いままで学んで来たリーマン空間の諸性質は全部，g_{ji} という基本テンソルから導かれる性質であるから，リーマン幾何学とは実は，リーマン空間をある平たんな空間の部分空間とみなした場合，上に述べたような変形で変わらない性質，すなわち固有性質の研究のことである．

したがって，もしある部分空間 V_{n-1} が，上述の変形によって平たんな部分空間となし得るならば，このような部分空間は，リーマン幾何学的な見地からみれば，平たんな空間と全然同じものである．したがって，部分空間の1つの固有性質である，レビ・チビタの平行性も，平たんな空間におけるそれと全然同一のものである．すなわち，部分空間上の2点でこれに接する2つのベクトルがあるならば，これらの平行性を調べるためには，この部分空間が平たんな部分空間となるような変形を行なってみればよい．もし，このようにして得られた平たんな部分空間において，上述の2つのベクトルが平行であるなら，これらは，もとの部分空間においても，レビ・チビタの意味で平行なのである．したがって，この場合には平行性は2つのベクトルの始点を結ぶ路に関係しない．

このような部分空間を我々は展開可能な部分空間と呼ぶ．この名前は，E_3 中の展開可能な V_2 においては，V_2 を平面上に展げることのできることから

来ている．たとえば，3次元ユークリッド空間中の円柱，円錐等は，E_3 中の展開可能な V_2 である．

次に展開可能でない部分空間 V_{n-1} 上の，レビ・チビタの平行性の幾何学的意義を見出すために，まず次の定理に注意しよう．

定理. ただ1つの媒介変数に関係する，E_n 中の $n-1$ 次元の平面の包絡面として定義される $n-1$ 次元の部分空間は，1つの展開可能な部分空間である．

この説明は，普通の3次元のユークリッド空間においては，次のように直観的にこれを行なうことができる．もちろん，この証明は高次元の場合にもあてはまるものである．

まず，非常に近い媒介変数の値に対応してつぎつぎに出て来る平面を，それぞれ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots$ とすれば，これらの平面は順次に直線 $g_1, g_2, g_3, \cdots\cdots$ で交わり，互いに無限小の角をなしている．しかも問題の包絡面は，$g_1g_2, g_2g_3, g_3g_4, \cdots\cdots$ で限られた，これらの無限に小さな平面 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots$ からできていると考えることができる．しかるに，α_1 は g_1 を軸として回転して α_0 に重ね，α_2 は g_2 を軸として回転して α_1 に重ね，……等とすることができるのであるから，問題の包絡面を全部 α_0 なる平面上に展開してしまうことができる．これで定理は証明された．

さて，E_n 中に与えられた $n-1$ 次元の部分空間 V_{n-1} は展開可能ではないとして，V_{n-1} 上に1つの曲線 C を考えよう．いま C 上の各点において，この部分空間 V_{n-1} に接する $n-1$ 次元平面をえがけば，これらの $n-1$ 次元平面は，ただ1つの媒介変数に関係する $n-1$ 次元平面群である．したがって，その包絡面は，1つの展開可能な $n-1$ 次元部分空間である．これともとの部分空間 V_{n-1} とが，与えられた曲線 C に沿って接していることは明らかであろう．このような展開可能な部分空間を我々は，C に沿っての V_{n-1} の接展開可能部分空間と呼ぶ．

さて，V_{n-1} 上の2点 P および P' における，V_{n-1} のベクトル v^κ および v'^κ の，P と P' を結ぶ1つの曲線 C に沿っての，レビ・チビタの意味での平行性は次のように説明される．

v^κ および v'^κ が部分空間 V_{n-1} のベクトルであるとは，v^κ および v'^κ が V_{n-1} 上の2点 P および P' をそれぞれ始点として V_{n-1} に接しているということである．いま V_{n-1} 上の C に沿っての，V_{n-1} に接する展開可能な部分空間 $\overline{V}_{n-1}$ を作れば，v^κ および v'^κ は $\overline{V}_{n-1}$ にも接している．いま $\overline{V}_{n-1}$ を $n-1$ 次元の平たんな空間上に展開するとき，v^κ および v'^κ が，この展開された空間内で普通の意味で平行であるなら，これらは V_{n-1} 上で C に沿って，レビ・チビタの意味で平行なのである．これを計算によって証明しよう．そのためにまず，P および P' が非常に近い場合を考えて，P の V_{n-1} 上での座標を (x^h)，P' のそれを (x^h+dx^h) とする．さて，v^κ は P におけるベクトルであって，V_{n-1} に接しているのであるから，V_{n-1} における成分を v^h とすれば

$$v^\kappa = B_i{}^\kappa v^i$$

である．したがって，$P(x^h)$ に非常に近い点 $P'(x^h+dx^h)$ におけるベクトル $v'^\kappa = v^\kappa + dv^\kappa$ は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned} v^\kappa + dv^\kappa &= v^\kappa + \frac{\partial B_i{}^\kappa}{\partial x^j} dx^j v^i + B_j{}^\kappa dv^j \\ &= B_i{}^\kappa v^i + (B_h{}^\kappa \{{}^{\,h}_{ji}\} + H_{ji}{}^\kappa) dx^j v^i + B_i{}^\kappa dv^i \\ &= B_h{}^\kappa (v^h + dv^h + \{{}^{\,h}_{ji}\} dx^j v^i) + H_{ji}{}^\kappa dx^j v^i. \end{aligned}$$

ところが $H_{ji}{}^\kappa dx^j v^i$ は V_{n-1} に垂直な成分であるから，P' における接 $n-1$ 次元平面を P と P' における接 $n-1$ 次元平面の交りを軸として，P における接 $n-1$ 次元平面上に重ねた場合に得られるベクトルは，実は $v^\kappa + dv^k$ を P における接 $n-1$ 次元平面上に正射影した

$$B_h{}^\kappa (v^h + dv^h + \{{}^{\,h}_{ji}\} dx^j v^i)$$

である．したがって，もし

$$dv^h + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} dx^j v^i = 0$$

であれば，このようにして得られるベクトルは $B_h{}^\kappa v^h$ となって，最初のものと平行になる．

もし，P と P' が有限の距離をもっており，V_{n-1} 上の曲線 C で結ばれている場合には，曲線 C 上に順次に無限に近い点 $P=P_0$，$P_1, P_2, \cdots, P_n=P'$ をとって，上の操作を続けていけばよい．これは結局，C に沿って V_{n-1} に接する展開可能曲面を求めて，これを平たんな空間，すなわち P における接 $n-1$ 次元平面上に展開するという操作である．したがって，C の方程式が

$$x^h = x^h(t)$$

なら，ベクトル v^h は，曲線 C に沿って

$$\frac{dv^h}{dt} + \left\{ {h \atop j\,i} \right\} \frac{dx^j}{dt} v^i = 0$$

を満足するとき，C に沿って平行に移動するといわれるわけである．

7 章

変　換　論

7.1　微小運動，キリングの方程式

n 次元リーマン空間 V_n 中の各点 (x^κ) を，方程式

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\xi^\kappa$$

によって，それに非常に近い点 $(\bar{x}^\kappa)$ に移すとき，点 (x^κ) と点 $(x^\kappa + dx^\kappa)$ の距離がつねに変わらないならば，上の点変換を**微小運動**と名づける．ただし，ここに ξ^κ は1つの反変ベクトルの成分を表わし，ε は1つの無限小定数を表わすものとする．

さて上の変換によって，2点 (x^κ) と $(x^\kappa + dx^\kappa)$ の距離 ds は，どのような変換を受けるかを計算してみよう．まず

$$d\bar{x}^\kappa = dx^\kappa + \varepsilon\partial_\alpha\xi^\kappa dx^\alpha, \qquad (\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha)$$

であるから

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= g_{\mu\lambda}(\bar{x})\,d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\lambda \\ &= (g_{\mu\lambda} + \varepsilon\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda})(dx^\mu + \varepsilon dx^\gamma\partial_\gamma\xi^\mu)(dx^\lambda + \varepsilon dx^\beta\partial_\beta\xi^\lambda) \\ &= g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda + \varepsilon[\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda} + g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha]\,dx^\mu dx^\lambda + \cdots\cdots \end{aligned}$$

したがって，ds が不変であるためには，ξ^λ は方程式

$$\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda} + g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha + g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha = 0$$

を満足しなければならない．いま，上式に

$$\partial_\nu g_{\mu\lambda} = \left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda} + \left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha}$$

を代入すれば

$$\xi^\nu\left(\left\{{\alpha \atop \nu\mu}\right\}g_{\alpha\lambda}+\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}g_{\mu\alpha}\right)+g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha+g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha=0,$$

$$g_{\alpha\lambda}\left(\partial_\mu\xi^\alpha+\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\xi^\nu\right)+g_{\mu\alpha}\left(\partial_\lambda\xi^\alpha+\left\{{\alpha \atop \lambda\nu}\right\}\xi^\nu\right)=0,$$

$$g_{\alpha\lambda}\nabla_\mu\xi^\alpha+g_{\mu\alpha}\nabla_\lambda\xi^\alpha=0,$$

すなわち，$g_{\alpha\lambda}\xi^\alpha=\xi_\lambda$ とおけば

$$\nabla_\mu\xi_\lambda+\nabla_\lambda\xi_\mu=0$$

を得る．これが

$$\bar{x}^\kappa=x^\kappa+\varepsilon\xi^\kappa$$

という微小変換が，微小運動を定義するために，ξ^κ が満足しなければならない条件である．これを我々は**キリングの方程式**と呼ぶ．

微小運動とは長さを変えない微小変換のことであるが，これがまた角をも変えないことが次のようにして証明される．

いま，点 (x^κ) における2つのベクトルを $\underset{1}{d}x^\kappa, \underset{2}{d}x^\kappa$ とすれば，そのなす角 θ は

$$\cos\theta=\frac{g_{\mu\lambda}\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}\underset{1}{d}x^\mu\underset{1}{d}x^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\underset{2}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda}}$$

で与えられる．ところが微小運動

$$\bar{x}^\kappa=x^\kappa+\varepsilon\xi^\kappa \quad \text{すなわち} \quad \delta x^\kappa=\varepsilon\xi^\kappa$$

によって，上式の分母は不変なのであるから，分子の変化だけを計算すれば

$$\begin{aligned}\delta(g_{\lambda\mu}\underset{1}{d}x^\lambda\underset{2}{d}x^\mu)&=\varepsilon(\partial_\nu g_{\mu\lambda})\xi^\nu\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda+\varepsilon g_{\mu\lambda}(\partial_\nu\xi^\mu)\underset{1}{d}x^\nu\underset{2}{d}x^\lambda+\varepsilon g_{\mu\lambda}(\partial_\nu\xi^\lambda)\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\nu\\&=\varepsilon(\xi^\nu\partial_\nu g_{\mu\lambda}+g_{\alpha\lambda}\partial_\mu\xi^\alpha+g_{\mu\alpha}\partial_\lambda\xi^\alpha)\underset{1}{d}x^\mu\underset{2}{d}x^\lambda\\&=0,\end{aligned}$$

したがって

$$\delta\cos\theta=0$$

であるから，我々は次の定理を得る．

定理 1. 微小運動によって，長さおよび角は不変であり，かつ測地線は測

地線に移る．

いまもし，座標系 (x^κ) を特別にとって，ξ^κ の成分が

$$\xi^\kappa = \delta_1^\kappa$$

となるようにすれば，キリングの方程式から

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^1} = 0$$

を得る．すなわち $g_{\mu\lambda}$ は変数 x^1 に無関係となるから

$$\bar{x}^1 = x^1 + t, \qquad \bar{x}^i = x^i \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

という形の変換で，$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ という基本2次形式はその形を変えない．したがって，我々は次の定理を得る．

定理 2.　V_n が1つの微小運動を許容するならば，V_n はこの微小運動から生成される一媒介変数の有限連続変換群

$$\bar{x}^1 = x^1 + t, \qquad \bar{x}^i = x^i \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

を許容する．

次に V_n が1つの ξ^κ で定義される運動を許容する，すなわち ξ^κ がキリングの方程式

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0$$

を満足するとして，この V_n 中に微分方程式

$$\frac{dx^\kappa}{dt} = \xi^\kappa$$

で定義される曲線 $x^\kappa(t)$ を考えよう．このような曲線の接線は ξ^κ と一致しており，微小変換の**路**と呼ばれる．いま，キリングの方程式に ξ^λ を掛けて縮約すれば

$$(\nabla_\mu \xi_\lambda)\xi^\lambda + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0$$

$$\frac{1}{2}\nabla_\mu(\xi_\lambda \xi^\lambda) + g_{\mu\lambda}\frac{\delta}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0,$$

を得る．したがって，次の定理を得る．

定理 3.　路の曲率ベクトルは勾配ベクトルである．

次に ξ^λ に垂直な曲線 $x^\kappa(s)$ を考えれば

$$\xi_\lambda \frac{dx^\lambda}{ds} = 0,$$

これを曲線に沿って共変微分すれば

$$\nabla_\mu \xi_\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} + \xi_\lambda \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0.$$

ところがキリングの方程式によれば，上式の左辺の第1項は0となるから

$$\xi_\lambda \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0.$$

したがって我々は次の定理を得る．

定理4. ξ^κ に垂直な曲線の曲率ベクトルは ξ^κ に垂直である．

次に2つの微小運動

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \mathcal{E}\xi^\kappa, \qquad \bar{x}^\kappa = x^\kappa + \mathcal{E}\eta^\kappa$$

を考えよう．この2つの微小変換がいずれも微小運動であるというのであれば，ξ^κ および η^κ はともにキリングの方程式

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0, \qquad \nabla_\mu \eta_\lambda + \nabla_\lambda \eta_\mu = 0$$

を満足していなければならない．

いま，この2つの微小運動がともに同一の路をもつものとすれば

$$\xi^\kappa = \sigma \eta^\kappa$$

というスカラー σ が存在しなければならない．したがってこれを第1のキリングの方程式に代入すれば

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = \sigma \nabla_\mu \eta_\lambda + (\nabla_\mu \sigma) \eta_\lambda + \sigma \nabla_\lambda \eta_\mu + (\nabla_\lambda \sigma) \eta_\mu$$

$$(\nabla_\mu \sigma) \eta_\lambda + (\nabla_\lambda \sigma) \eta_\mu = 0$$

を得る．

ところが η_λ は全部は0でないから $\eta_1 \neq 0$ としよう．このとき上式で $\lambda = \mu = 1$ とすれば，我々は

$$\nabla_1 \sigma = 0$$

を得る．次に上式で $\lambda=1$ とすれば

$$(\nabla_\mu \sigma)\eta_1 = 0 \quad したがって \quad \nabla_\mu \sigma = 0$$

を得る．すなわち σ は定数となる．したがってこの 2 つの微小運動は本質的には同じものである．したがって

定理 5.　V_n の 2 つの微小運動が同一の路をもつことはあり得ない，

を得る．

微小運動

$$\bar{x}^\kappa = x^\kappa + \varepsilon\xi^\kappa \quad すなわち \quad \delta x^\kappa = \varepsilon\xi^\kappa$$

によって各点は

$$\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu \delta x^\lambda} = \pm\varepsilon\sqrt{g_{\mu\lambda}\xi^\mu\xi^\lambda}$$

だけ動かされるわけであるが，もしこの距離が空間の各点で一定，

すなわち $$g_{\mu\lambda}\xi^\mu\xi^\lambda = 一定$$

であれば，この微小運動は**微小移行**と呼ばれる．この場合にはキリングの方程式

$$\nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = 0$$

に ξ^λ を掛けて縮約することによって

$$(\nabla_\mu \xi_\lambda)\xi^\lambda + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0,$$

$$\frac{1}{2}\nabla_\mu(\xi_\lambda \xi^\lambda) + \xi^\lambda \nabla_\lambda \xi_\mu = 0,$$

すなわち $$\xi^\lambda \nabla_\lambda \xi^\kappa = 0$$

を得るから

定理 6.　微小移行の路は測地線である，

を得る．

7.2　リーマン空間の射影変換

我々は 2 章 2.6 節において，計量が $ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$ で与えられるようなリーマン空間 V_n の測地線は，微分方程式

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}+\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}-\frac{dx^\kappa}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0$$

で与えられることを見た．この式から $\dfrac{d^2s}{dt^2}\Big/\dfrac{ds}{dt}$ を消去するために，両辺に $\dfrac{dx^\omega}{dt}$ を掛ければ

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\frac{dx^\omega}{dt}+\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^\omega}{dt}-\frac{dx^\kappa}{dt}\frac{dx^\omega}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0,$$

ここにおいて，指標 κ と ω を交換すれば

$$\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\frac{dx^\kappa}{dt}+\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^\kappa}{dt}-\frac{dx^\omega}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\dfrac{ds}{dt}}=0$$

を得る．いま，これらの方程式を辺々相減ずれば

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\frac{dx^\omega}{dt}-\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\frac{dx^\kappa}{dt}+\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\omega}{dt}-\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^\kappa}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0$$

となるが，これが一般の媒介変数 t を用いた場合の，測地線の微分方程式である．

いま V_n のほかにもう 1 つほかのリーマン空間 V'_n があって，V_n の各点と V'_n の各点との間には 1 対 1 の対応がついているとしよう．この対応する点をそれぞれ同じ座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ で表わすこととし，V'_n の計量は

$$ds'^2=g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

で与えられるものとすれば，V'_n の測地線の微分方程式は，前と同じ一般の媒介変数 t を用いて

$$\frac{d^2x^\kappa}{dt^2}\frac{dx^\omega}{dt}-\frac{d^2x^\omega}{dt^2}\frac{dx^\kappa}{dt}+\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'\frac{dx^\omega}{dt}-\left\{{\omega \atop \mu\lambda}\right\}'\frac{dx^\kappa}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}=0$$

となる．ただし，ここに $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$ は $g'_{\mu\lambda}$ から作られたクリストッフェルの 3 添字記号を表わすものとする．

さて V_n の点と V'_n の点との間には1対1の対応がつけられているのであるが，いまさらに V_n の測地線と V'_n の測地線は，この対応によってつねに対応するものと仮定しよう．この場合には，上の2つの測地線の微分方程式を辺々相減じて，

$$\left[\left(\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}' - \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\right)\frac{dx^\omega}{dt} - \left(\left\{{}^{\omega}_{\mu\lambda}\right\}' - \left\{{}^{\omega}_{\mu\lambda}\right\}\right)\frac{dx^\kappa}{dt}\right]\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

を得る．しかるに，ここに現われる $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}' - \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$ は1つの3次の混合テンソルの成分になっているのである．なぜなら $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'$ および $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$ の座標の変換

$$x^{\kappa'} = x^{\kappa'}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

に対する変換式

$$\left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\}' = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}' + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

および

$$\left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

を辺々相減ずれば

$$\left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\}' - \left\{{}^{\kappa'}_{\mu'\lambda'}\right\} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left(\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}' - \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}\right)$$

となるからである．したがって

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}' - \left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\} = \phi_{\mu\lambda}{}^\kappa$$

とおけば，我々は

$$\left(\phi_{\mu\lambda}{}^\kappa\frac{dx^\omega}{dt} - \phi_{\mu\lambda}{}^\omega\frac{dx^\kappa}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

を得る．この式はまた

$$(\phi_{\mu\lambda}{}^\kappa\delta^\omega_\nu - \phi_{\mu\lambda}{}^\omega\delta^\kappa_\nu)\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} = 0$$

とも書き直すことができる．ところがこの方程式は $\dfrac{dx^\kappa}{dt}$ の如何にかかわらず成立すべき式なのであるから，これから

$$\phi_{\mu\lambda}{}^\kappa\delta^\omega_\nu + \phi_{\lambda\nu}{}^\kappa\delta^\omega_\mu + \phi_{\nu\mu}{}^\kappa\delta^\omega_\lambda - \phi_{\mu\lambda}{}^\omega\delta^\kappa_\nu - \phi_{\lambda\nu}{}^\omega\delta^\kappa_\mu - \phi_{\nu\mu}{}^\omega\delta^\kappa_\lambda = 0$$

が得られる．ここにおいて ω と ν についての縮約を行なえば

$$n\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}+\phi_{\lambda\mu}{}^{\kappa}+\phi_{\lambda\mu}{}^{\kappa}-\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}-\phi_{\lambda\omega}{}^{\omega}\delta_{\mu}^{\kappa}-\phi_{\omega\mu}{}^{\omega}\delta_{\lambda}^{\kappa}=0,$$

すなわち

$$\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n+1}(\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda\omega}{}^{\omega}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu\omega}{}^{\omega})$$

を得る．いま

$$\frac{1}{n+1}\phi_{\nu\omega}{}^{\omega}=\phi_{\nu},$$

と書けば

$$\phi_{\mu\lambda}{}^{\kappa}=\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu}$$

であるから，我々は $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$ と $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の関係として

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'=\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu}$$

を得る．ただし，ここに ϕ_{λ} は，上式において $\kappa=\mu$ とおいて縮約した式 $\dfrac{\partial\log\sqrt{g'}}{\partial x^{\lambda}}=\dfrac{\partial\log\sqrt{g}}{\partial x^{\lambda}}+(n+1)\phi_{\lambda}$ からわかるように，1つの勾配ベクトルである．このように測地線を測地線に移す対応または変換を，**射影的対応**または**射影的変換**と呼ぶ．これはユークリッド空間において，直線を直線に対応させる点変換を射影変換と呼ぶのと同一である．

V'_n の $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$ と V_n の $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ との関係が

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'=\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\phi_{\mu}$$

で与えられるとき，V'_n の曲率テンソル $K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ と V_n の曲率テンソル $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ との間の関係を求めてみよう．上の関係式を

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}'}{\partial x^{\mu}}+\left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}'\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}'-\left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}'\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}'$$

に代入すれば

$$\begin{aligned}K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=&\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial x^{\nu}}+\delta_{\mu}^{\kappa}\frac{\partial\phi_{\lambda}}{\partial x^{\nu}}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\frac{\partial\phi_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial\left\{{\kappa \atop \nu\lambda}\right\}}{\partial x^{\mu}}-\delta_{\nu}^{\kappa}\frac{\partial\phi_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}-\delta_{\lambda}^{\kappa}\frac{\partial\phi_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\\&+\left(\left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}+\delta_{\nu}^{\kappa}\phi_{\alpha}+\delta_{\alpha}^{\kappa}\phi_{\nu}\right)\left(\left\{{\alpha \atop \mu\lambda}\right\}+\delta_{\mu}^{\alpha}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\alpha}\phi_{\mu}\right)\\&-\left(\left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\phi_{\alpha}+\delta_{\alpha}^{\kappa}\phi_{\mu}\right)\left(\left\{{\alpha \atop \nu\lambda}\right\}+\delta_{\nu}^{\alpha}\phi_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\alpha}\phi_{\nu}\right),\end{aligned}$$

したがって，これを計算すれば

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda})+\delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_{\nu}\phi_{\lambda}-\phi_{\nu}\phi_{\lambda})$$

を得る.

この式において，$\kappa=\nu$ とおいて縮約を行なえば

$$K'_{\mu\lambda}=K_{\mu\lambda}-(n-1)(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda}),$$

したがって

$$\nabla_{\mu}\phi_{\lambda}-\phi_{\mu}\phi_{\lambda}=-\frac{1}{n-1}(K'_{\mu\lambda}-K_{\mu\lambda})$$

を得る．これを最初の式に代入すれば

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\frac{1}{n-1}\delta^{\kappa}_{\nu}(K'_{\mu\lambda}-K_{\mu\lambda})-\frac{1}{n-1}\delta^{\kappa}_{\mu}(K'_{\nu\lambda}-K_{\nu\lambda}),$$

すなわち

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K'_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K'_{\nu\lambda})=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda})$$

を得る．この式は

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\lambda}_{\mu}K_{\nu\lambda})$$

で与えられるテンソルが，射影変換によって不変であることを示している．これを**ワイルの射影曲率テンソル**と呼ぶ．そしてワイルの射影曲率テンソルが 0 になるような空間を我々は**射影的に平たんな空間**と呼ぶ．

我々のリーマン空間 V_n が射影的に平たんであるために必要にしてかつ十分な条件は，V_n の曲率テンソル $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ が

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda})=0,$$

すなわち

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n-1}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda}-\delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda})$$

を満足することである．いま指標 κ を下げて書けば，上式は

$$K_{\nu\mu\lambda\kappa}=\frac{1}{n-1}(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda})$$

となるが，$K_{\nu\mu\lambda\kappa}$ は $K_{\nu\mu\lambda\kappa}+K_{\nu\mu\kappa\lambda}=0$ という関係式を満足しているのであるから，上式から

$$(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda})+(g_{\nu\lambda}K_{\mu\kappa}-g_{\mu\lambda}K_{\nu\kappa})=0$$

を得る．この式に $g^{\nu\kappa}$ を掛けて縮約を行なえば

$$nK_{\mu\lambda}-Kg_{\mu\lambda}=0,$$

すなわち

$$K_{\mu\lambda}=\frac{1}{n}Kg_{\mu\lambda}$$

を得る．これを

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\kappa K_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa K_{\nu\lambda})$$

に代入すれば

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_\nu^\kappa g_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa g_{\nu\lambda})$$

を得るから，我々は次の定理を述べることができる．

定理 7. 射影的に平たんなリーマン空間は定曲率空間である．

さて，ワイルの射影曲率テンソル

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\kappa K_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa K_{\nu\lambda})$$

は射影変換によって不変である．したがって射影的に平たんな空間，すなわち

$$W_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\kappa K_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa K_{\nu\lambda})=0$$

である空間は，射影変換で

$$W'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-1}(\delta_\nu^\kappa K'_{\mu\lambda}-\delta_\mu^\kappa K'_{\nu\lambda})=0$$

である空間に移る．したがって，定理 7 によって，つぎのベルトラミの定理を得る．

定理 8. 定曲率空間は射影変換で定曲率空間に移る.

ところがわれわれは, $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ と $K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ の間の関係は

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda} - \phi_{\mu}\phi_{\lambda}) + \delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_{\nu}\phi_{\lambda} - \phi_{\nu}\phi_{\lambda})$$

であることを知っているから, 上の式から得られる

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = \frac{K}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda}), \quad K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = \frac{K'}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda})$$

をこの式に代入して

$$\frac{K'}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda}) = \frac{K}{n(n-1)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda})$$
$$- \delta^{\kappa}_{\nu}(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda} - \phi_{\mu}\phi_{\lambda}) + \delta^{\kappa}_{\mu}(\nabla_{\nu}\phi_{\lambda} - \phi_{\nu}\phi_{\lambda})$$

を得る. ここで $\kappa = \nu$ とおいて縮約を行なえば

$$K'g'_{\mu\lambda} = Kg_{\mu\lambda} - n(n-1)(\nabla_{\mu}\phi_{\lambda} - \phi_{\mu}\phi_{\lambda})$$

を得る. これが V'_n の $g'_{\mu\lambda}$ と V_n の $g_{\mu\lambda}$ の関係を与える式である.

7.3 トーマスの射影接続係数

我々は前節で V'_n の測地線と V_n の測地線とを対応させるような射影変換は

$$\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}' = \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} + \delta^{\kappa}_{\mu}\phi_{\lambda} + \delta^{\kappa}_{\lambda}\phi_{\mu}$$

で与えられることをみた. この式において $\kappa = \lambda$ と置いて縮約を行なえば

$$\left\{ {\lambda \atop \nu\lambda} \right\}' = \left\{ {\lambda \atop \nu\lambda} \right\} + (n+1)\phi_{\nu},$$

すなわち

$$\phi_{\nu} = \frac{1}{n+1}\left(\left\{ {\alpha \atop \nu\alpha} \right\}' - \left\{ {\alpha \atop \nu\alpha} \right\}\right)$$

を得る. この式を最初の式に代入すれば

$$\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}' = \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} + \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\mu}\left(\left\{ {\alpha \atop \lambda\alpha} \right\}' - \left\{ {\alpha \atop \lambda\alpha} \right\}\right) + \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\lambda}\left(\left\{ {\alpha \atop \mu\alpha} \right\}' - \left\{ {\alpha \atop \mu\alpha} \right\}\right),$$

すなわち

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' - \frac{1}{n+1}\delta_\mu^\kappa\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\}' - \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\kappa\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}'$$

$$= \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\mu^\kappa\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\kappa\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}$$

となる．この式は

$$\Pi_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\mu^\kappa\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\kappa\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}$$

という量が，リーマン空間の射影変換に対して不変であることを示している．これを**ティー・ワイ・トーマスの射影接続係数**という．

この射影接続係数 $\Pi_{\mu\lambda}^\kappa$ はクリストッフェルの 3 添字記号 $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ と同一の変換は受けない．いまその変換式を求めてみよう．まず

$$\left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right),$$

次に

$$\left\{{\alpha' \atop \mu'\alpha'}\right\} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\mu'}},$$

したがって

$$\Pi_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = \left\{{\kappa' \atop \mu'\lambda'}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\left\{{\alpha' \atop \lambda'\alpha'}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\left\{{\alpha' \atop \mu'\alpha'}\right\}$$

$$= \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\left(\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\mu^\kappa\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta_\lambda^\kappa\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}\right) + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right]$$

$$- \frac{1}{n+1}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\lambda'}} - \frac{1}{n+1}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\mu'}}$$

であるから，結局 $\Pi_{\mu\lambda}^\kappa$ の変換式として

$$\Pi_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}}\Pi_{\mu\lambda}^\kappa + \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)$$

$$- \frac{1}{n+1}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\lambda'}} - \frac{1}{n+1}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\mu'}}$$

を得る．

さて

$$\Pi^{\kappa}_{\mu\lambda} = \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\mu}\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\} - \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\lambda}\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}$$

から得られる

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} = \Pi^{\kappa}_{\mu\lambda} + \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\mu}\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\} + \frac{1}{n+1}\delta^{\kappa}_{\lambda}\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}$$

を測地線の微分方程式

$$\frac{d^2x^{\kappa}}{ds^2} + \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds} = 0$$

に代入すれば

$$\frac{d^2x^{\kappa}}{ds^2} + \Pi^{\kappa}_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\lambda}}{ds} + \frac{2}{n+1}\left\{{\alpha \atop \nu\alpha}\right\}\frac{dx^{\nu}}{ds}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = 0$$

となる．ここで

$$\frac{2}{n+1}\left\{{\alpha \atop \nu\alpha}\right\}\frac{dx^{\nu}}{ds} = \frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}$$

すなわち

$$t = \int e^{-\frac{2}{n+1}\int\left\{{\alpha \atop \nu\alpha}\right\}dx^{\nu}}ds$$

を満足する媒介変数 t を採用すれば，上の測地線の微分方程式は

$$\frac{d^2x^{\kappa}}{ds^2} + \Pi^{\kappa}_{\mu\lambda}\frac{dx^{\lambda}}{ds}\frac{dx^{\kappa}}{ds} + \frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}\frac{dx^{\kappa}}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2x^{\kappa}}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx^{\kappa}}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} + \Pi^{\kappa}_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\lambda}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x^{\kappa}}{dt^2} + \Pi^{\kappa}_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\lambda}}{dt} = 0$$

となる．このような媒介変数 t を，ティー・ワイ・トーマスの**射影媒介変数**と呼ぶ．

7.4 リーマン空間の共形変換

ここに2つのリーマン空間 V'_n および V_n があって，これらの各点の間には互いに1対1の対応がつけられているものとしよう．そして前と同じように互いに対応する点は同一の座標 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ で表わされうるように，V'_n および V_n における座標系は選ばれているものと仮定する．いま V'_n の計量

$$ds'^2 = g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

および V_n の計量

$$ds^2 = g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda$$

の間に，1つの関数 $\rho(x) > 0$ を用いて

$$ds' = \rho(x)\,ds,$$

すなわち
$$g'_{\mu\lambda} = \rho^2 g_{\mu\lambda}$$

という関係が存在するものとすれば，V'_n および V_n において，それぞれ互いに対応する2つのベクトル dx^κ および δx^κ のなす角は，V'_n においてこれを測っても，V_n においてこれを測っても同一である．なぜなら

$$\frac{g'_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{g'_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g'_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}} = \frac{\rho^2 g_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{\rho^2 g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{\rho^2 g_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}}$$
$$= \frac{g_{\mu\lambda}dx^\mu\delta x^\lambda}{\sqrt{g_{\mu\lambda}dx^\mu dx^\lambda}\sqrt{g_{\mu\lambda}\delta x^\mu\delta x^\lambda}}$$

であるからである．この意味で，2つのリーマン空間 V'_n および V_n の間のこのような対応または変換を，**共形的な対応**または**変換**と呼び，共形的な変換によって互いに移り得る2つのリーマン空間は，**互いに共形的である**という．

いま2つのリーマン空間 V'_n および V_n は互いに共形的であるとして V'_n の $\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}'$ と V_n の $\left\{{\kappa \atop \mu\nu}\right\}$ の間に成立する関係式を求めてみよう．

まず V'_n の $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$ を定義する

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' = \frac{1}{2} g'^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial g'_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g'_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g'_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)$$

の，$g_{\mu\lambda}$ 等のところへ $\rho^2 g_{\mu\lambda}$ 等を，$g'^{\kappa\alpha}$ のところへ $\dfrac{1}{\rho^2} g^{\kappa\alpha}$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' &= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2} g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial \rho^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \rho^2 g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \rho^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2} g^{\kappa\alpha}\left(\rho^2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda} + \rho^2 \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} - \rho^2 \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right. \\
&\qquad \left. + 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x^\lambda} g_{\mu\alpha} + 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} g_{\lambda\alpha} - 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} g_{\mu\lambda}\right) \\
&= \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} + \delta^\kappa_\mu \frac{\partial \log \rho}{\partial x^\lambda} + \delta^\kappa_\lambda \frac{\partial \log \rho}{\partial x^\mu} - g^{\kappa\alpha} \frac{\partial \log \rho}{\partial x^\alpha} g_{\mu\lambda},
\end{aligned}$$

したがって

$$\rho_\nu = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^\nu}$$

とおけば，我々は $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}'$ と $\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}$ の間の関係式として

$$\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' = \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} + \delta^\kappa_\mu \rho_\lambda + \delta^\kappa_\lambda \rho_\mu - g^{\kappa\alpha} \rho_\alpha g_{\mu\lambda}$$

を得る．

いま上式において，$\kappa = \lambda = \omega$ と置いて縮約を行なえば

$$\left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\}' = \left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\} + n\rho_\mu,$$

すなわち

$$\rho_\mu = \frac{1}{n}\left(\left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\}' - \left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\}\right)$$

を得る．これをさらに最初の方程式に代入すれば，我々は

$$\begin{aligned}
\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' = \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} &+ \frac{1}{n}\delta^\kappa_\mu\left(\left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\}' - \left\{{\alpha \atop \lambda\alpha}\right\}\right) + \frac{1}{n}\delta^\kappa_\lambda\left(\left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}' - \left\{{\alpha \atop \mu\alpha}\right\}\right) \\
&- \frac{1}{n} g^{\kappa\alpha}\left(\left\{{\omega \atop \alpha\omega}\right\}' - \left\{{\omega \atop \alpha\omega}\right\}\right) g_{\mu\lambda},
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
&\left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\}' - \frac{1}{n}\delta^\kappa_\mu \left\{{\omega \atop \lambda\omega}\right\}' - \frac{1}{n}\delta^\kappa_\lambda \left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\}' + \frac{1}{n} g'^{\kappa\alpha} \left\{{\omega \atop \alpha\omega}\right\}' g'_{\mu\lambda} \\
&= \left\{{\kappa \atop \mu\lambda}\right\} - \frac{1}{n}\delta^\kappa_\mu \left\{{\omega \atop \lambda\omega}\right\} - \frac{1}{n}\delta^\kappa_\lambda \left\{{\omega \atop \mu\omega}\right\} + \frac{1}{n} g^{\kappa\alpha} \left\{{\omega \atop \alpha\omega}\right\} g_{\mu\lambda}
\end{aligned}$$

を得る．

この式は

$$K_{\mu\lambda}^{\kappa}=\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\mu}^{\kappa}\left\{{}_{\lambda\omega}^{\omega}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda}^{\kappa}\left\{{}_{\mu\omega}^{\omega}\right\}+\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}\left\{{}_{\alpha\omega}^{\omega}\right\}g_{\mu\lambda}$$

で定義される量 $K_{\mu\lambda}^{\kappa}$ が，リーマン空間の共形変換

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda}$$

で不変であることを示している．この $K_{\mu\lambda}^{\kappa}$ を我々は**ジェー・エム・トーマスの共形接続係数**と呼ぶ．

ここに注意しなければならないことは，このジェー・エム・トーマスの共形接続係数 $K_{\mu\lambda}^{\kappa}$ は，座標の変換

$$x^{\kappa'}=x^{\kappa'}(x^1,\cdots,x^n)$$

に対して，$\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}$ と同様な変換は受けないということである．いまその変換法則を求めてみよう．まず $\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}$ の変換法則は

$$\left\{{}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}\right\}=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}+\frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right),$$

$\left\{{}_{\mu\omega}^{\omega}\right\}$ の変換法則は

$$\left\{{}_{\mu'\omega'}^{\omega'}\right\}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\left\{{}_{\mu\omega}^{\omega}\right\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}$$

であるから

$$\begin{aligned}K_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}&\left\{{}_{\mu'\lambda'}^{\kappa'}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\left\{{}_{\lambda'\omega'}^{\omega'}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\left\{{}_{\mu'\omega'}^{\omega'}\right\}+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\left\{{}_{\alpha'\omega'}^{\omega'}\right\}g_{\mu'\lambda'}\\&=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}+\frac{\partial^2x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right)-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left\{{}_{\lambda\omega}^{\omega}\right\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}\right)\\&\quad-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\left\{{}_{\mu\omega}^{\omega}\right\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}\right)+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\left\{{}_{\alpha\omega}^{\omega}\right\}+\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\alpha'}}\right)g_{\mu'\lambda'}\\&=\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\left(\left\{{}_{\mu\lambda}^{\kappa}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\mu}^{\kappa}\left\{{}_{\lambda\omega}^{\omega}\right\}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda}^{\kappa}\left\{{}_{\mu\omega}^{\omega}\right\}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\frac{1}{n}g^{\kappa\alpha}\left\{{}_{\alpha\omega}^{\omega}\right\}g_{\mu\lambda}\right)+\frac{\partial^2x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right]\\&\quad-\frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\lambda'}}-\frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\mu'}}+\frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\frac{\partial\log\Delta}{\partial x^{\alpha'}}g_{\mu'\lambda'},\end{aligned}$$

すなわち

$$K_{\mu'\lambda'}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}K_{\mu\lambda}^{\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\lambda'}}\right) - \frac{1}{n}\delta_{\mu'}^{\kappa'}\phi_{\lambda'}$$

$$- \frac{1}{n}\delta_{\lambda'}^{\kappa'}\phi_{\mu'} + \frac{1}{n}g^{\kappa'\alpha'}\phi_{\alpha'}g_{\mu'\lambda'},$$

ただし

$$\phi_{\lambda}' = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^{\lambda'}}$$

を得る．これがジェー・エム・トーマスの共形接続係数 $K_{\mu\lambda}^{\kappa}$ の変換法則を与える式である．

7.5　ワイルの共形曲率テンソル

我々は前節で，クリストッフェルの記号 $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$ は，リーマンの計量の共形変換

$$g_{\mu\lambda}' = \rho^2 g_{\mu\lambda}$$

に対して

$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}' = \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} + \delta_{\mu}^{\kappa}\rho_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\mu} - g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}$$

という変換を受けることをみた．本節では，このリーマンの計量の共形変換に対して，リーマン・クリストッフェルの曲率テンソル $K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ がどのような変換を受けるかを計算してみよう．

まず

$$K_{\nu\mu\lambda}'{}^{\kappa} = \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\}'}{\partial x^{\mu}} + \{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\}'\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\}' - \{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\}'\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\}',$$

に

$$\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}' = \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} + \delta_{\mu}^{\kappa}\rho_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\mu} - g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}$$

を代入すれば

$$K_{\nu\mu\lambda}'{}^{\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} + \delta_{\mu}^{\kappa}\rho_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\mu} - g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda})$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\{{}^{\kappa}_{\nu\lambda}\} + \delta_{\nu}^{\kappa}\rho_{\lambda} + \delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\nu} - g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\nu\lambda})$$

$$+ (\{{}^{\kappa}_{\nu\alpha}\} + \delta_{\nu}^{\kappa}\rho_{\alpha} + \delta_{\alpha}^{\kappa}\rho_{\nu} - g^{\kappa\omega}\rho_{\omega}g_{\nu\alpha})(\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\} + \delta_{\mu}^{\alpha}\rho_{\lambda}$$

$$+ \delta_{\lambda}^{\alpha}\rho_{\mu} - g^{\alpha\omega}\rho_{\omega}g_{\mu\lambda})$$

$$-\left(\left\{{}^{\kappa}_{\mu\alpha}\right\}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\alpha}+\delta^{\kappa}_{\alpha}\rho_{\mu}-g^{\kappa\omega}\rho_{\omega}g_{\mu\alpha}\right)\left(\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}+\delta^{\alpha}_{\nu}\rho_{\lambda}+\delta^{\alpha}_{\lambda}\rho_{\nu}-g^{\alpha\omega}\rho_{\omega}g_{\nu\lambda}\right)$$

$$=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}\left(\frac{\partial\rho_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\right\}-\rho_{\mu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\mu\lambda}\right)$$
$$+\delta^{\kappa}_{\mu}\left(\frac{\partial\rho_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\left\{{}^{\alpha}_{\nu\lambda}\right\}-\rho_{\nu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}g_{\nu\lambda}\right)$$
$$-g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial\rho_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}-\rho_{\omega}\left\{{}^{\omega}_{\nu\alpha}\right\}-\rho_{\nu}\rho_{\alpha}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}\rho_{\nu\alpha}\right)g_{\mu\lambda}$$
$$+g^{\kappa\alpha}\left(\frac{\partial\rho_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}-\rho_{\omega}\left\{{}^{\omega}_{\mu\alpha}\right\}-\rho_{\mu}\rho_{\alpha}+\frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\rho_{\gamma}\rho_{\beta}\rho_{\mu\alpha}\right)g_{\nu\lambda},$$

したがって

$$\rho_{\mu\lambda}=\frac{\partial\rho_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\rho_{\alpha}\left\{{}^{\alpha}_{\mu\lambda}\right\}-\rho_{\mu}\rho_{\lambda}+\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\rho_{\beta}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda},\qquad \rho_{\lambda}{}^{\kappa}=g^{\kappa\mu}\rho_{\mu\lambda}$$

とおけば，我々は最後に

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\mu\lambda}+\delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\nu\lambda}-\rho_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}+\rho_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}$$

を得る．この式において $\kappa=\nu$ とおいて縮約を行なえば

$$K'_{\mu\lambda}=K_{\mu\lambda}-(n-2)\rho_{\mu\lambda}-\rho_{\alpha}{}^{\alpha}g_{\mu\lambda}$$

を得る．この式に $g'^{\mu\lambda}=\dfrac{1}{\rho^2}g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約を行なえば

$$K'=\frac{1}{\rho^2}\left[K-2(n-1)\rho_{\alpha}{}^{\alpha}\right],$$

すなわち

$$\rho_{\alpha}{}^{\alpha}=-\frac{1}{2(n-1)}(\rho^2K'-K)$$

となるから，これをもとの式に代入すれば

$$K'_{\mu\lambda}=K_{\mu\lambda}-(n-2)\rho_{\mu\lambda}+\frac{1}{2(n-1)}(\rho^2K'-K)g_{\mu\lambda},$$

すなわち

$$\rho_{\mu\lambda}=\left[-\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{K'g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]-\left[-\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]$$

を得る．この式をさらに

$$K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \delta^{\kappa}_{\nu}\rho_{\mu\lambda} + \delta^{\kappa}_{\mu}\rho_{\nu\lambda} - \rho_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda} + \rho_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}$$

に代入すれば，我々は最後に

$$\begin{aligned} K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} &+ \delta^{\kappa}_{\nu}\left[\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2} - \frac{K'\,g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)} - \frac{K_{\mu\lambda}}{n-2} + \frac{K\,g_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right] \\ &- \delta^{\kappa}_{\mu}\left[\frac{K'_{\nu\lambda}}{n-2} - \frac{K'\,g'_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)} - \frac{K_{\nu\lambda}}{n-2} + \frac{K\,g_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right] \\ &+ \left[\frac{K'_{\nu}{}^{\kappa}}{n-2} - \frac{K'\,\delta^{\kappa}_{\nu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g'_{\mu\lambda} - \left[\frac{K_{\nu}{}^{\kappa}}{n-2} - \frac{K\delta^{\kappa}_{\nu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g_{\mu\lambda} \\ &- \left[\frac{K'_{\mu}{}^{\kappa}}{n-2} - \frac{K'\,\delta^{\kappa}_{\mu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g'_{\nu\lambda} - \left[\frac{K_{\mu}{}^{\kappa}}{n-2} - \frac{K\delta^{\kappa}_{\mu}}{2(n-1)(n-2)}\right]g_{\nu\lambda} \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} &- \frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K'_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K'_{\nu\lambda} + K'_{\nu}{}^{\kappa}g'_{\mu\lambda} - K'_{\mu}{}^{\kappa}g'_{\nu\lambda}) \\ &\qquad + \frac{K'}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g'_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g'_{\nu\lambda}) \\ &= K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} - \frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda} + K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda} - K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}) \\ &\qquad + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda}) \end{aligned}$$

を得る．この式は

$$\begin{aligned} C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} = K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa} &- \frac{1}{n-2}(\delta^{\kappa}_{\nu}K_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}K_{\nu\lambda} + K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda} - K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda}) \\ &+ \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\kappa}_{\nu}g_{\mu\lambda} - \delta^{\kappa}_{\mu}g_{\nu\lambda}) \end{aligned}$$

で定義されるテンソルが，リーマン空間の共形変換で不変であることを示している．このテンソルを我々は**ワイルの共形曲率テンソル**と呼ぶ．ところがこのワイルの共形曲率テンソルは，$n=3$ のときには恒等的に 0 となるのである．これを証明するために，1 つの直交 n 重系 $h^{\kappa}_{(\alpha)}$ をとろう．いま $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ の κ を下にさげて

$$C_{\nu\mu\lambda\kappa}=K_{\nu\mu\lambda\kappa}-\frac{1}{n-2}(g_{\nu\kappa}K_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}K_{\nu\lambda}+K_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})$$
$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda}-g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})$$

と書き，

$$C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}=C_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\delta)}^{\nu}\,h_{(\gamma)}^{\mu}\,h_{(\beta)}^{\lambda}\,h_{(\alpha)}^{\kappa}$$

とおけば，$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}\equiv 0$ を証明する代わりに，$C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}\equiv 0$ を証明してもよい．

さて $n=3$ の場合には，

$$\begin{aligned}C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}=&K_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}\\&-(\delta_{\delta\alpha}K_{(\gamma)(\beta)}-\delta_{\gamma\alpha}K_{(\delta)(\beta)}+K_{(\delta)(\alpha)}\delta_{\gamma\beta}-K_{(\gamma)(\alpha)}\delta_{\delta\beta})\\&+\frac{1}{2}K(\delta_{\delta\alpha}\delta_{\gamma\beta}-\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\delta\beta})\end{aligned}$$

である．ただし，ここに

$$\begin{aligned}K_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}&=K_{\nu\mu\lambda\kappa}h_{(\delta)}^{\nu}\,h_{(\gamma)}^{\mu}\,h_{(\beta)}^{\lambda}\,h_{(\alpha)}^{\kappa},\\K_{(\gamma)(\beta)}&=\sum_{\alpha}K_{(\alpha)(\gamma)(\beta)(\alpha)}\\K&=\sum_{\beta}K_{(\beta)(\beta)}\end{aligned}$$

である．

したがって，たとえば $C_{(1)(2)(3)(1)}$ を計算してみれば次の通りである．

$$\begin{aligned}C_{(1)(2)(3)(1)}=&K_{(1)(2)(3)(1)}-(\delta_{11}K_{(2)(3)}-\delta_{21}K_{(1)(3)}+K_{(1)(1)}\delta_{23}-K_{(2)(1)}\delta_{13})\\&+\frac{1}{2}K(\delta_{11}\delta_{23}-\delta_{21}\delta_{13})\\=&K_{(1)(2)(3)(1)}-K_{(2)(3)}\\=&K_{(1)(2)(3)(1)}-(K_{(1)(2)(3)(1)}+K_{(2)(2)(3)(2)}+K_{(3)(2)(3)(3)})\\=&0.\end{aligned}$$

なぜなら $K_{(2)(2)(3)(2)}=K_{(3)(2)(3)(3)}=0$ であるからである．これと類似な方法で他のすべての $C_{(\delta)(\gamma)(\beta)(\alpha)}$ が 0 であることが証明し得られるから，この験証は読者諸君にお任せすることとする．

なお，$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ という共形テンソルが $C_{\omega\mu\lambda}{}^{\omega}=0$ という恒等式を満足していることも $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$ の定義の式から容易に験証される．いま

$$C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda}+K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$
$$+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$

を x^{ω} で共変微分すれば

$$\nabla_{\omega}C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\nabla_{\omega}K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta_{\nu}^{\kappa}\nabla_{\omega}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}\nabla_{\omega}K_{\nu\lambda}+\nabla_{\omega}K_{\nu}{}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\nabla_{\omega}K_{\mu}{}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$
$$+\frac{\nabla_{\omega}K}{(n-1)(n-2)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})$$

ここで $\kappa=\omega$ と置いて縮約すれば

$$\nabla_{\omega}C_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}=\nabla_{\omega}K_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}-\frac{1}{n-2}(\nabla_{\nu}K_{\mu\lambda}-\nabla_{\mu}K_{\nu\lambda}+\nabla_{\omega}K_{\nu}{}^{\omega}g_{\mu\lambda}-\nabla_{\omega}K_{\mu}{}^{\omega}g_{\nu\lambda})$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}(\nabla_{\nu}Kg_{\mu\lambda}-\nabla_{\mu}Kg_{\nu\lambda})$$

となる．

ところがビアンキの恒等式

$$\nabla_{\omega}K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}+\nabla_{\nu}K_{\mu\omega\lambda}{}^{\kappa}+\nabla_{\mu}K_{\omega\nu\lambda}{}^{\kappa}=0$$

において $\kappa=\omega$ とおいて縮約を行なえば

$$\nabla_{\omega}K_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}=\nabla_{\nu}K_{\mu\lambda}-\nabla_{\mu}K_{\nu\lambda}$$

さらに $g^{\mu\lambda}$ を掛けて縮約すれば

$$\nabla_{\omega}K_{\nu}{}^{\omega}=\frac{1}{2}\nabla_{\nu}K$$

を得るから，これらを上式に代入すれば

$$\nabla_{\omega}C_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}=(n-3)\,C_{\nu\mu\lambda}$$

ただし

$$C_{\mu\nu\lambda}=\frac{\nabla_{\nu}K_{\mu\lambda}}{n-2}-\frac{\nabla_{\nu}Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}-\frac{\nabla_{\mu}K_{\nu\lambda}}{n-2}+\frac{\nabla_{\mu}Kg_{\nu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}$$

を得る．

7.6 リーマン空間が局所ユークリッド空間と互いに共形的になるための条件

さて，これで準備がととのったから次には，我々のリーマン空間が局所ユークリッド空間と共形的になるための条件を求めよう．そのために前節の議論における V'_n を局所ユークリッド空間と考えれば $K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ でなければならない．したがって

$$C'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$$

でなければならない．このとき $K'_{\mu\lambda}$ および K' も 0 となるべきであるから

$$\rho_{\mu\lambda}=\left[-\frac{K'_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{K'g'_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]-\left[-\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}+\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}\right]$$

から得られる

$$\nabla_\mu\rho_\lambda-\rho_\mu\rho_\lambda+\frac{1}{2}g^{\beta\alpha}\rho_\beta\rho_\alpha g_{\mu\lambda}=\frac{K_{\mu\lambda}}{n-2}-\frac{Kg_{\mu\lambda}}{2(n-1)(n-2)}$$

は積分可能でなければならない．また逆にこの式が積分可能であれば，$K'_{\mu\lambda}=K'=0$ となり，$C'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ から $K'_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ を得る．

さて，上式の積分可能条件を求めるには

$$\nabla_\nu\nabla_\mu\rho_\lambda-\nabla_\mu\nabla_\nu\rho_\lambda=-\rho_\kappa K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}$$

を計算すればよろしい．実際にこの積分条件を計算すれば

$$C_{\nu\mu\lambda}=0$$

を得る．ところが

$$\nabla_\omega C_{\nu\mu\lambda}{}^{\omega}=(n-3)C_{\nu\mu\lambda}$$

からわかるように，この条件は $n>3$ のときは $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ から導かれる．したがって次の定理を得る．

定理 9. リーマン空間 V_n が局所ユークリッド空間と共形的になるために必要にしてかつ十分な条件は，$n=3$ のときは $C_{\nu\mu\lambda}=0$，$n>3$ のときは $C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=0$ である．

我々のリーマン空間 V_n が定曲率空間であれば

$$K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda}),$$

$$K_{\mu\lambda}=\frac{K}{n}g_{\mu\lambda}$$

であるから

$$\begin{aligned}C_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}&=K_{\nu\mu\lambda}{}^{\kappa}-\frac{1}{n-2}(\delta_{\nu}^{\kappa}K_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}K_{\nu\lambda}+K_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-K_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})\\&\qquad+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})\\&=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})-\frac{2K}{n(n-2)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})\\&\qquad+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_{\nu}^{\kappa}g_{\mu\lambda}-\delta_{\mu}^{\kappa}g_{\nu\lambda})\\&=0.\end{aligned}$$

したがって次の定理を得る．

定理 10.　定曲率空間は局所ユークリッド空間と共形的である．

7.7　V_n 中の V_m の共形的性質

我々は前節で，リーマン空間 V_n の基本共変テンソル $g_{\mu\lambda}$ に

$$g'_{\mu\lambda}=\rho^2 g_{\mu\lambda}$$

という共形変換を行なえば，そのクリストッフェルの3添字記号 $\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}$ は

$$\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}'=\left\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\right\}+\delta_{\mu}^{\kappa}\rho_{\lambda}+\delta_{\lambda}^{\kappa}\rho_{\mu}-g^{\kappa\alpha}\rho_{\alpha}g_{\mu\lambda}$$

という変換を受けることをみた．

いま V_n 中に

$$x^{\kappa}=x^{\kappa}(y^h)$$

で定義される m 次元の部分リーマン空間 V_m を考えれば，その基本共変テンソル

$$g_{ji}=B_j{}^{\mu}B_i{}^{\lambda}g_{\mu\lambda}$$

は，上述の共形変換に対して

$$g'_{ji} = \rho^2 g_{ji}$$

という変換を受ける．したがって V_m に対するクリストッフェルの 3 添字記号 $\{{}^{h}_{ji}\}$ は

$$\{{}^{h}_{ji}\}' = \{{}^{h}_{ji}\} + \delta^h_j \rho_i + \delta^h_i \rho_j - g^{ha} \rho_a g_{ji}$$

という変換を受ける．ただし，ここに

$$\rho_i = \frac{\partial \log \rho}{\partial x^i} = \rho_\lambda B_i^\lambda$$

である．

次にオイラー・スカウテンのテンソル

$$H_{ji}{}^\kappa = \partial_j B_i{}^\kappa + \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - B_h{}^\kappa \{{}^{h}_{ji}\}$$

は上述の共形変換に対してどのような変換を受けるかを計算してみよう．そのために

$$H'_{ji}{}^\kappa = \partial_j B_i{}^\kappa + \{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}' B_j{}^\mu B_i{}^\lambda - B_h{}^\kappa \{{}^{h}_{ji}\}'$$

に，上述の $\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\}'$ および $\{{}^{h}_{ji}\}'$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
H'_{ji}{}^\kappa &= \partial_j B_i{}^\kappa + (\{{}^{\kappa}_{\mu\lambda}\} + \delta^\kappa_\mu \rho_\lambda + \delta^\kappa_\lambda \rho_\mu - g^{\kappa\alpha} \rho_\alpha g_{\mu\lambda}) B_j{}^\mu B_i{}^\lambda \\
&\qquad - B_h{}^\kappa (\{{}^{h}_{ji}\} + \delta^h_j \rho_i + \delta^h_i \rho_j - g^{ha} \rho_a g_{ji}) \\
&= H_{ji}{}^\kappa - g_{ji} (g^{\kappa\alpha} \rho_\alpha - B_h{}^\kappa B_a{}^\mu g^{ha} \rho_\mu) \\
&= H_{ji}{}^\kappa - g_{ji} (g^{\kappa\alpha} \rho_\alpha - B_h{}^\kappa B_a{}^\alpha g^{ha} \rho_\alpha) \\
&= H_{ji}{}^\kappa - g_{ji} (g^{\kappa\alpha} - B_h{}^\kappa B_a{}^\alpha g^{ha}) \rho_\alpha
\end{aligned}$$

となる．ところが

$$g^{\kappa\alpha} = B_h{}^\kappa B_a{}^\alpha g^{ha} + B_P{}^\kappa B_P{}^\alpha$$

であるから，結局 $H_{ji}{}^\kappa$ の変換式は

$$H'_{ji}{}^\kappa = H_{ji}{}^\kappa - g_{ji} B_P{}^\kappa B_P{}^\alpha \rho_\alpha$$

となる．

いま，この式の両辺に

$$g'^{ji} = \frac{1}{\rho^2} g^{ji}$$

を掛けて，j, i で縮約を行なえば

$$g'^{ji}H'_{ji}{}^{\kappa}=\frac{1}{\rho^2}(g^{ji}H_{ji}{}^{\kappa}-mB_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha}\rho_\alpha),$$

したがって

$$B_P{}^{\kappa}B_P{}^{\alpha}\rho_\alpha=\frac{1}{m}(g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}-\rho^2g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa})$$

であるから，これをもとの $H_{ji}{}^{\kappa}$ の変換式に代入すれば

$$H'_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}(g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}-\rho^2g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa})$$

すなわち

$$H'_{jk}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g'_{ji}g'^{cb}H'_{cb}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}$$

となる．ところがこの式は

$$M_{ji}{}^{\kappa}=H_{ji}{}^{\kappa}-\frac{1}{m}g_{ji}g^{cb}H_{cb}{}^{\kappa}$$

というテンソルが V_n の共形変換で不変であることを示している．これを**共形的なオイラー・スカウテンのテンソル**と呼ぶことにする．この $M_{ji}{}^{\kappa}$ が κ に関して V_m に垂直なことは明らかであるから我々は

$$M_{ji}{}^{\kappa}=M_{jiP}B_P{}^{\kappa}$$

とおくことができる．ここに現われる M_{jiP} は共形的な第2基本テンソルである

さて $M_{ji}{}^{\kappa}=0$ はこの点が臍点であることを示しているのであるから，我々は上述の考察から次の2定理を得る．

定理 11.　共形変換によって臍点は臍点に移る．

定理 12.　共形変換によって全臍曲面は全臍曲面に移る．

第1基本テンソル g_{ji}，第2基本テンソル H_{jiP} の共形変換に対する変換式はすでに求めることができたから，次にはやはり部分空間に対して基本的なベクトル L_{jPQ} の変換式を求めておこう．

まず L_{jPQ} の定義は

$$L_{jPQ} = g_{\mu\lambda}(\nabla_j B_P{}^\mu) B_Q{}^\lambda$$

であるが，V_n の**共形変換**

$$g'_{\mu\lambda} = \rho^2 g_{\mu\lambda}$$

によって，上式は

$$L'_{jPQ} = g'_{\mu\lambda}(\nabla'_j B'_P{}^\mu) B'_Q{}^\lambda$$

となったものとしよう．ところが，ここに

$$g'_{\mu\lambda} = \rho^2 g_{\mu\lambda},$$

$$\nabla'_j B'_P{}^\mu = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{\rho} B_P{}^\mu\right) + \left[\left\{{}^{\ \mu}_{\nu\omega}\right\} + \delta^\mu_\nu \rho_\omega + \delta^\mu_\omega \rho_\nu - g^{\mu\alpha}\rho_\alpha g_{\nu\omega}\right] B_j{}^\nu \frac{1}{\rho} B_P{}^\omega,$$

$$B'_Q{}^\mu = \frac{1}{\rho} B_Q{}^\mu$$

であるから，これを上式に代入すれば

$$\begin{aligned} L'_{jPQ} &= \rho^2 g_{\mu\lambda}\left[-\frac{\rho_j}{\rho} B_P{}^\mu + \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial x^j} + \frac{1}{\rho}\left\{{}^{\ \mu}_{\nu\omega}\right\} B_j{}^\nu B_P{}^\omega + \frac{1}{\rho} B_j{}^\mu \rho_\omega B_P{}^\omega \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\rho}\rho_j B_P{}^\mu\right]\frac{1}{\rho} B_Q{}^\lambda \\ &= g_{\mu\lambda}\left[\frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial x^j} + \left\{{}^{\ \mu}_{\nu\omega}\right\} B_j{}^\omega B_P{}^\omega\right] B_Q{}^\lambda \\ &= L_{jPQ} \end{aligned}$$

となる．したがって我々は次の定理を得る．

定理 13. 基本ベクトル L_{jPQ} は共形変換に対して不変である．

さ く い ん

あ 行

か 行

さ 行

た 行

な 行

は 行

ま　行

ら　行

わ　行

著 者 略 歴

矢野健太郎
1912 年　東京生れ
1934 年　東京大学理学部数学科卒業
専　攻　微分幾何学
1972 年　東京工業大学名誉教授

数学ライブラリー 20
リーマン幾何学入門

1971 年 4 月 15 日　第 1 版第 1 刷発行
1981 年 8 月 20 日　第 1 版第 7 刷発行

定価はカバー・ケース
に表示してあります。

著者との協議
により検印は
廃止します.

著　者　矢 野 健 太 郎（やのけんたろう）
発行者　森　北　肇
印刷者　小 笠 原 長 利

発行所　森 北 出 版 株式会社
東京都千代田区富士見 1-4-11
電話 東京 (265) 8 3 4 1 (代表)
振替 東京 1-34757 郵便番号 102

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員

落丁・乱丁本はお取替えいたします　　印刷　秀好堂印刷／製本　協栄製本

3341 - 0020 - 8409

Printed in Japan